



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目： 二维空间中距离不确定性的测度方法研究
作者： 毛政元, 范琳娜, 李霖
DOI: 10.13203/j.whugis20220131
收稿日期: 2022-03-14
网络首发日期: 2022-06-13
引用格式: 毛政元, 范琳娜, 李霖. 二维空间中距离不确定性的测度方法研究[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20220131>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI: 10.13203/j.whugis20220131

引用格式：毛政元，范琳娜，李霖. 二维空间中距离不确定性的测度方法研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2022，DOI: 10.13203/j.whugis20220131 (MAO Zhengyuan, FAN Linna, LI Lin. Methodological Research on Measuring Distance Uncertainty in Two-Dimensional Space[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220131)

二维空间中距离不确定性的测度方法研究

毛政元^{1,2} 范琳娜^{1,2} 李霖³

1 福州大学数字中国研究院（福建），福建 福州，350108

2 福州大学空间数据挖掘与信息共享教育部重点实验室，福建 福州，350108

3 武汉大学资源与环境科学学院，湖北 武汉，430079

摘要：距离是空间位置的函数，定量、精确地揭示空间位置不确定性向距离不确定性传递的函数关系具有重要的理论与现实意义，是测绘与地理信息领域亟待解决的重大科学问题。本文针对该问题现有解决方案的局限性，在满足与不确定点观测位置对应的实际位置在误差圆内服从完全空间随机分布的前提下，推导了二维空间中一个确定点与一个不确定点间以及两个不确定点间距离不确定性的概率分布函数和对应的概率密度函数，并利用后者研究了点位不确定性向距离不确定性传递的规律，为研究与解决距离不确定性问题开辟了新的途径。结果表明确定点与不确定点间以及两个不确定点间的距离不确定性均服从如下规律：（1）当误差圆半径（对应点位精度）与点间观测距离同时改变时，前者与后者之比与距离不确定性正相关；（2）当误差圆半径保持不变时，距离不确定性与点间观测距离负相关；（3）当点间观测距离保持不变时，距离不确定性与误差圆半径正相关。当误差圆半径与点间观测距离一致时，两个不确定点间距离的不确定性大于确定点和不确定点间距离的不确定性；当该条件不成立时，涉及不确定点数不同的距离不确定性不具可比性。

关键词：距离；不确定性；二维空间；点位；测度方法

中图分类号：P208

文献标志码：A

1 引言

提高数据采集精度是测绘与地理信息领域从业者追求的目标，相关研究很多^[1,2]。空间关系是其中涉及的重要主题，按照信息内容的差异分为以下三种基本类型：（1）由空间物体的几何特性决定的空间关系；（2）由空间物体的几何与非几何特性共同决定的空间关系；（3）由空间物体的非几何特性导出的空间关系^[3]。类型（1）包括距离关系、方向关系与拓扑关系等，是人类空间认系统，在地理空间向信息空间转换的过程中，人类根据需要对其进行了不同程度的简

知的核心内容，也是测绘与地理信息领域内受到高度重视的研究专题^[4-6]，本文关注其中的距离关系不确定性（下文简称“距离不确定性”）。

距离是空间位置的函数，距离不确定性可视为空间位置不确定性经由该函数关系的传递。在基于对象模型组织的数据集中，现实世界被抽象为以地理对象为元素的集合^[7]，地理对象间的距离不确定性取决于地理对象本身的不确定性，而后者来自以下三个方面：其一，地理空间是个高度复杂的巨化^[8]；其二，地理对象边界模糊；其三，地理对象的位置信息中包含误差。其中第一种

收稿日期：2022-03-14

项目资助：国家自然科学基金（40471113，40871206）；江西省煤田地质局普查综合大队委托（01022103）

通讯作者：毛政元，博士，教授，博士生导师，主要从事时空系统认知与测度等研究。zymao@fzu.edu.cn

作者简介：范琳娜，硕士研究生。fanlinna820@foxmail.com

作者简介：李霖，博士，教授，博士生导师。lilin@whu.edu.cn

原因导致的距离不确定性属于尺度问题,通过选择符合特定应用场合需要的地图综合尺度解决。第二种原因导致的距离不确定性属于认知问题,通过引入模糊数学方法解决。第三种原因导致的距离不确定性广泛地存在于涉及地理空间数据的各种应用场景中,不确定程度取决于位置精度,是目前尚未彻底解决的问题。在基于场模型组织的数据集中,现实世界被抽象为以地理位置为自变量,以地理位置对应的属性为因变量的函数^[7],其中的距离不确定性问题与上述基于对象模型所生成数据集的第三种情形类似。点元位置(简称点位)不确定性与点位精度是一对紧密相关、含义相反的概念,两个空间位置确定的点间距离是确定的,而空间位置确定的点与空间位置不确定的点间以及两个空间位置不确定的点间距离则具有不确定性,程度取决于点位不确定性。对于以栅格数据模型记录的地理空间数据,距离不确定性同时受到位置精度和栅格尺寸的影响。本文关注以矢量数据模型记录的二维地理空间数据集中因点位不确定性导致的距离不确定性。

点位不确定性是地理空间数据不确定性这个专题下包含的重要内容,也是研究线元、面元与体元位置不确定性的基础,前人的相关研究很多^[9-12],代表性研究成果包括早期提出的误差圆模型与正态分布模型^[13]。与有关位置不确定性研究形成鲜明对照的是,现有文献中针对距离不确定性展开的研究较少^[9,14]。Leung 等在前人工作基础上提出了一种长度与面积测度误差分析的思路框架,其中设计了一种距离不确定性的估算

方法^[15]。此外,利用位置误差模型和泰勒公式推导得到的距离测量中误差传播的近似规律^[16-18]、为获得无偏估计而提出的基于非线性误差传播的距离测量偏差修正方法^[19,20]以及通过计算采样点位置标准差求得地块边界精度的地籍数据质量评价方法^[21,22]都属于这个主题下的重要成果。但前人的研究成果尚未彻底揭示从点位不确定性向距离不确定性传递的函数关系。本文针对现有研究成果存在的局限性,直接以点位信息为依据构建描述距离不确定性的模型,定量地阐述从点位不确定性向点间距离关系不确定性传递的机制,为提高距离测度水平提供科学依据。

2 距离不确定性计算方法

2.1 确定点与不确定点间距离不确定性计算

如图 1, $D(-x,0)$ ($x > r > 0$) 是二维空间中准确的点, $O_2(0,0)$ 为同一空间中不确定点的观测位置,不确定性的用半径为 r 的误差圆(可以理解为与该不确定点 O_2 对应的实际位置可能出现的范围)表示。记 z ($z \in [x-r, x+r]$) 为定点 D 到不确定点 O_2 的距离,则以 D 为圆心、 d ($d \in [x-r, z]$) 为半径的圆与圆 O_2 相交, z 的分布函数可以表示为二者公共部分的面积 S_{DO_2} 与后者的总面积 S_c 之比,即:

$$G_1(z) = P(d \leq z) = \frac{S_{DO_2}}{S_c},$$

$$z \in [x-r, x+r] \quad (1)$$

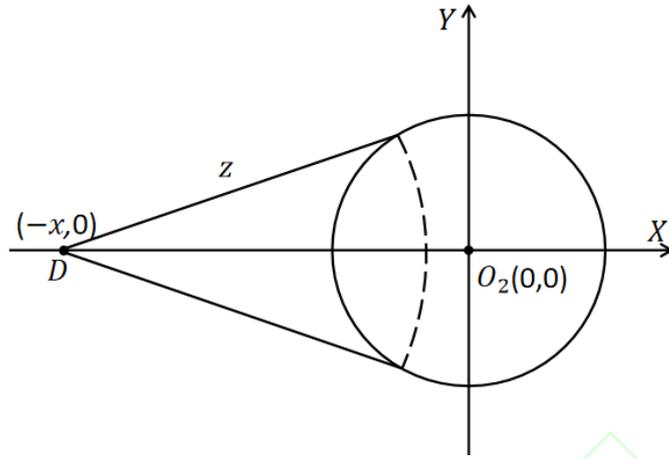


图 1 包含一个不确定点的距离计算

Fig. 1 Distance computation with one uncertain point

解方程组

$$\begin{cases} (X+x)^2 + Y^2 = z^2 & (2) \\ X^2 + Y^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

得两圆的交点坐标为:

$$(X_1, Y_1) = \left[\frac{z^2 - r^2 - x^2}{2x}, \frac{1}{2x} \sqrt{4r^2x^2 - (z^2 - r^2 - x^2)^2} \right] \quad (4)$$

$$(X_2, Y_2) = \left[\frac{z^2 - r^2 - x^2}{2x}, -\frac{1}{2x} \sqrt{4r^2x^2 - (z^2 - r^2 - x^2)^2} \right]. \quad (5)$$

当 $z \leq \sqrt{x^2 + r^2}$ 时, z 的分布函数为

$$\begin{aligned} G_1(z) = & \frac{1}{\pi r^2} \left[z^2 \arccos\left(\frac{x^2 + z^2 - r^2}{2xz}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2x^2 - (z^2 - r^2 - x^2)^2} \right] \\ & + r^2 \arccos\left(\frac{x^2 + r^2 - z^2}{2xr}\right); \end{aligned} \quad (6)$$

对应的密度函数为

$$g_1(z) = G_1'(z) = \frac{2z}{\pi r^2} \arccos\left(\frac{x^2 + z^2 - r^2}{2xz}\right); \quad (7)$$

当 $z > \sqrt{x^2 + r^2}$ 时, z 的分布函数为

$$\begin{aligned} G_1(z) = & \frac{1}{\pi r^2} \left[z^2 \arccos\left(\frac{x^2 + z^2 - r^2}{2xz}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2x^2 - (z^2 - r^2 - x^2)^2} \right] \\ & + \pi r^2 - r^2 \arccos\left(\frac{z^2 - x^2 - r^2}{2xr}\right); \end{aligned} \quad (8)$$

对应的密度函数同式 (7)。

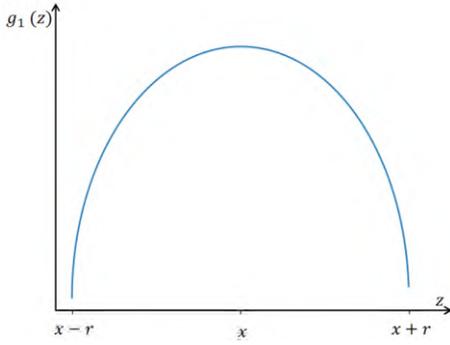


图 2 包含一个不确定点的距离概率密度函数
Fig. 2 The probability density function of the distance containing an uncertain point

分布函数 (6)、(8) 和密度函数 (7) 完整地刻画了距离变量 z 在其定义域 $[x-r, x+r]$ 上取值的统计规律, 定量地描述了一个不确定点到一定点的距离不确定性, 图 2 为概率密度函数的图形, 其形状与正态分布的密度函数类似。

2.2 两个不确定点间的距离不确定性计算

本节将包含一个不确定点的距离不确定性测度模型推广到两个不确定点间的距离不确定性测度模型。如图 3 (a、b), O_1 、 O_2 为两个不确定性程度相同且相互独立的点, 二者间的观测距离为 L 。仍采用误差圆表示点位的不确定性, 其半径 r 为对应比例尺的制图精度, 则以 O_1 、 O_2 为圆心的误差圆 (以下简称为圆 O_1 、 O_2) 分别为对应真实点可能出现的范围。

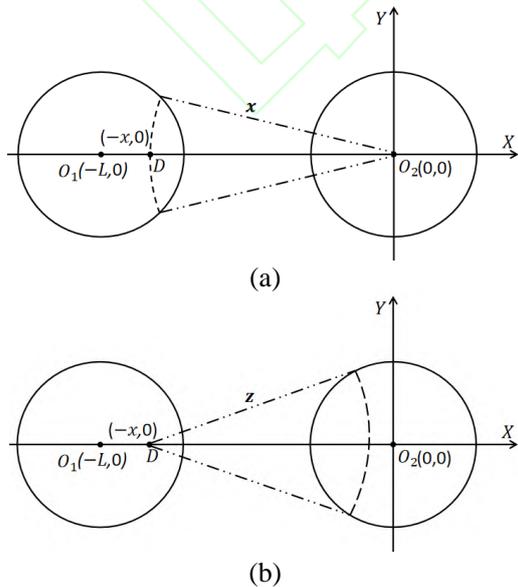


图 3 两个不确定点之间的距离计算
Fig. 3 Distance computation between two uncertain points

先考虑线段两侧端点落入圆 O_1 、 O_2 内的分布。选择点 O_2 为原点, O_1O_2 连线方向为横轴正向。以 O_2 为圆心、以 x ($L-r \leq x \leq L+r$) 为半径做圆, 则该圆与圆 O_1 相交, 二者公共部分的面积 S_1 占圆 O_1 总面积 S_c 的比例即为本节所考虑的线段落入圆 O_1 内的端点关于 x 的分布, 即:

$$F(x) = P(d_1 \leq x) = \frac{S_1}{S_c},$$

$$x \in [L-r, L+r] \quad (9)$$

式中, d_1 为线段落入圆 O_1 内的端点到点 O_2 的距离, x 为 d_1 可能取到的值, $F(x)$ 为 x 的分布函数, $P(d_1 \leq x)$ 为 d_1 取值小于等于 x 的概率, S_1 为以 O_2 为圆心、以 x 为半径的圆与圆 O_1 相交的公共部分的面积, S_c 为圆 O_1 的总面积, L 为 O_1 、 O_2 间的观测距离, r 为以 O_1 、 O_2 为圆心的误差圆的半径。

对落入圆 O_1 且与点 O_2 距离为 x 的点 D , 记其到圆 O_2 的距离为 z (其值满足 $x-r \leq z \leq x+r$)。以 D 为圆心、 z 为半径做圆, 则该圆与圆 O_2 相交, 二者公共部分的面积 S_2 与后者总面积 S_c 之比即为本节所考虑的线段落入圆 O_2 内的端点在落入 O_1 圆内的端点与点 O_2 的距离为 x 时关于 z 的分布, 即:

$$G_2(x, z) = P(d_1 = x, d_2 \leq z) = \frac{S_2}{S_c},$$

$$x \in [L-r, L+r], z \in [x-r, x+r] \quad (10)$$

式中, x 、 d_1 、 L 与 r 的含义同 (9) 式, d_2 为点 D (线段落入圆 O_1 内的端点) 到线段落入圆 O_2 内的端点的距离, z 为 d_2 可能取到的值, $G_2(x, z)$ 为落入圆 O_2 内的端点在落入 O_1 圆内的端点与点 O_2 的距离为 x 时关于 z 的分布函数, $P(d_1 = x, d_2 \leq z)$ 为与分布函数 $G_2(x, z)$ 对应的概率, S_2 为以 D 为圆心、 z 为半径的圆与圆 O_2 公共部分的面积, S_c 为圆 O_2 的总面积 (与圆 O_1 的总面积相等)。

两个不确定点 O_1 、 O_2 间的距离 z 的分布函数 $H(z)$ 由分布函数 $F(x)$ 和 $G_2(x, z)$

对应的密度函数 $f(x)$ 和 $g_2(x, z)$ 之积经积分运算后确定, 即:

$$H(z) = P(l \leq z) = \frac{\int_{L-2r}^z dz \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} f(x)g_2(x, z)dx}{\int_{L-2r}^{L+2r} dz \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} f(x)g_2(x, z)dx} \quad (11)$$

式中, x 、 L 与 r 的含义同 (9) 式, l 为两个不确定点 O_1 、 O_2 间的距离, 变量 $z \in [L-2r, L+2r]$ 为 l 可能取到的值, $H(z)$ 为 z 的分布函数, $P(l \leq z)$ 为 $H(z)$ 对应的概率, $\rho_1(z)$ 与 $\rho_2(z)$ 分别为积分区间下、上限, 且:

$$\rho_1(z) = \max(z-r, L-r),$$

$$\rho_2(z) = \min(z+r, L+r),$$

$f(x)$ 和 $g_2(x, z)$ 分别为分布函数 $F(x)$ 和 $G_2(x, z)$ 对应的密度函数, 且:

$$f(x) = \frac{2x}{\pi r^2} \arccos\left(\frac{x^2 + L^2 - r^2}{2Lx}\right),$$

$$g_2(x, z) = \frac{2z}{\pi r^2} \arccos\left(\frac{x^2 + z^2 - r^2}{2xz}\right).$$

二者均可参照 § 2.1 中的方法推导得到。

(11) 式右侧分式的分母为端点分别落入误差圆 O_1 、 O_2 内的全部线段 (简称线段全集) 的测度, 而分子为线段全集中长度落入区间 $[L-2r, z]$ 上的线段子集的测度, 故后者与前者之比为以线段长度为自变量的分布函数。对应的密度函数为

$$h(z) = H'(z) = \frac{\int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} f(x)g_2(x, z)dx}{\int_{L-2r}^{L+2r} dz \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} f(x)g_2(x, z)dx} \quad (12)$$

其图形较一个确定点与一个不确定点间距离的密度函数更接近正态分布密度 (图 4)。

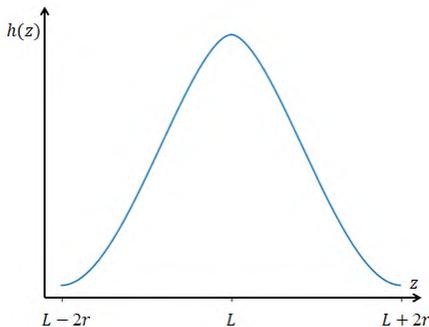


图 4 两个不确定点间距离的概率密度函数
Fig. 4 The probability density function of the distance between two uncertain points

3 算例分析

3.1 确定点与不确定点间的距离算例

考虑实际测量的精度要求, 误差圆半径 r 不超过 50mm, 点间观测距离 L_1 最大值为 10000mm。具体地, r 依次设置为 1mm、5mm、10mm、15mm、20mm、25mm、30mm、40mm 和 50mm; L_1 依次设置为 50mm、100mm、200mm、500mm、800mm、1000mm、2000mm、5000mm、8000mm 和 10000mm。对于每一组 r 和 L_1 , 根据公式 (7) 计算距离变量 z 的均值 (μ)、方差 (D) 和标准差 (std), 并参照有关不确定性测度与数据处理的约定^[23], 运用蒙特卡洛实验同步验证, 实验过程中样本容量设定为 10,000,000, 结果表明, 针对任意一组数据, 蒙特卡洛实验耗时均为本文方法的 10 倍以上。

选取部分 r 、 L_1 组合, 分别以 r/L_1 、 r 和 L_1 为索引得表 1-3。 μ/L_1 为距离变量 z 的均值与观测值 L_1 之比, 反映了含有不确定性的距离均值相对于观测值的偏差, 该值越小说明因点位不确定性导致的点间距离不确定性越小; std/μ 为距离变量 z 的标准差与均值之比, 即因不确定性导致的距离测度值相对于平均情况的偏离程度, 是定量测度距离不确定性的另一重要指标, 该值越小越好。

由表 1 可知, 本文方法与蒙特卡洛方法计算得到的 μ/L_1 、 std/μ 数值极为接近, 验证了本文方法的准确性。另一方面, 当误差圆半径 r 和距离 L_1 之比即 r/L_1 逐渐增大时, μ/L_1 和 std/μ 均逐渐增大, 当 r/L_1 保持不变时, 两者的值均保持稳定 (近似不变)。据此可推知: 当误差圆半径 r 与两点间观测距离 L_1 同时改变时, r/L_1 与距离不确定性存在显著的正相关关系。

由表 2 可知, 当误差圆半径 r 保持不变时, 距离不确定性与点间观测距离 L_1 呈显著的负相关关系。由表 3 可知, 当点间观测距离 L_1 保持不变时, 距离不确定性与误差

圆半径 r 呈显著的正相关关系。图 5 更加直观地佐证了上述结论。

表 1 以 r/L_1 为索引的算例结果比较

Tab.1 Result comparison of computational cases with r/L_1 as index

r/L_1	r	L_1	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_1	std/μ	μ	D	μ/L_1	std/μ
0.0100	5	500	500.006250	6.249935	1.000013	0.005000	500.006405	6.254226	1.000013	0.005002
0.0100	20	2000	2000.025000	99.998956	1.000013	0.005000	2000.027858	99.977001	1.000014	0.004999
0.0150	15	1000	1000.028125	56.248682	1.000028	0.007500	1000.026743	56.251367	1.000027	0.007500
0.0150	30	2000	2000.056251	224.994726	1.000028	0.007500	2000.056659	224.998672	1.000028	0.007500
0.0300	15	500	500.056252	56.244726	1.000113	0.014998	500.055556	56.236890	1.000111	0.014997
0.0300	30	1000	1000.112504	224.978904	1.000113	0.014998	1000.109196	224.946128	1.000109	0.014997
0.1000	5	50	50.062526	6.243481	1.001251	0.049912	50.064054	6.242654	1.001281	0.049907
0.1000	10	100	100.125052	24.973926	1.001251	0.049912	100.126765	24.983507	1.001268	0.049920
0.2000	10	50	50.250420	24.895307	1.005008	0.099293	50.251184	24.895074	1.005024	0.099291
0.2000	20	100	100.500840	99.581227	1.005008	0.099293	100.498165	99.653924	1.004982	0.099332

表 2 以 r 为索引的算例结果比较

Tab.2 Result comparison of computational cases with r as index

r	r/L_1	L_1	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_1	std/μ	μ	D	μ/L_1	std/μ
5	0.1000	50	50.062526	6.243481	1.001251	0.049912	50.064054	6.242654	1.001281	0.049907
5	0.0100	500	500.006250	6.249935	1.000013	0.005000	500.006405	6.254226	1.000013	0.005002
10	0.2000	50	50.250420	24.895307	1.005008	0.099293	50.251184	24.895074	1.005024	0.099291
10	0.1000	100	100.125052	24.973926	1.001251	0.049912	100.126765	24.983507	1.001268	0.049920
15	0.0300	500	500.056252	56.244726	1.000113	0.014998	500.055556	56.236890	1.000111	0.014997
15	0.0150	1000	1000.028125	56.248682	1.000028	0.007500	1000.026743	56.251367	1.000027	0.007500
20	0.2000	100	100.500840	99.581227	1.005008	0.099293	100.498165	99.653924	1.004982	0.099332
20	0.0100	2000	2000.025000	99.998956	1.000013	0.005000	2000.027858	99.977001	1.000014	0.004999
30	0.0300	1000	1000.112504	224.978904	1.000113	0.014998	1000.109196	224.946128	1.000109	0.014997
30	0.0150	2000	2000.056251	224.994726	1.000028	0.007500	2000.056659	224.998672	1.000028	0.007500

表 3 以 L_1 为索引的算例结果比较

Tab.3 Result comparison of computational cases with L_1 as index

L_1	r/L_1	r	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_1	std/μ	μ	D	μ/L_1	std/μ
50	0.2000	10	50.250420	24.895307	1.005008	0.099293	50.251184	24.895074	1.005024	0.099291
50	0.1000	5	50.062526	6.243481	1.001251	0.049912	50.064054	6.242654	1.001281	0.049907
100	0.2000	20	100.500840	99.581227	1.005008	0.099293	100.498165	99.653924	1.004982	0.099332
100	0.1000	10	100.125052	24.973926	1.001251	0.049912	100.126765	24.983507	1.001268	0.049920
500	0.0300	15	500.056252	56.244726	1.000113	0.014998	500.055556	56.236890	1.000111	0.014997

500	0.0100	5	500.006250	6.249935	1.000013	0.005000	500.006405	6.254226	1.000013	0.005002
1000	0.0300	30	1000.112504	224.978904	1.000113	0.014998	1000.109196	224.946128	1.000109	0.014997
1000	0.0150	15	1000.028125	56.248682	1.000028	0.007500	1000.026743	56.251367	1.000027	0.007500
2000	0.0150	30	2000.056251	224.994726	1.000028	0.007500	2000.056659	224.998672	1.000028	0.007500
2000	0.0100	20	2000.025000	99.998956	1.000013	0.005000	2000.027858	99.977001	1.000014	0.004999

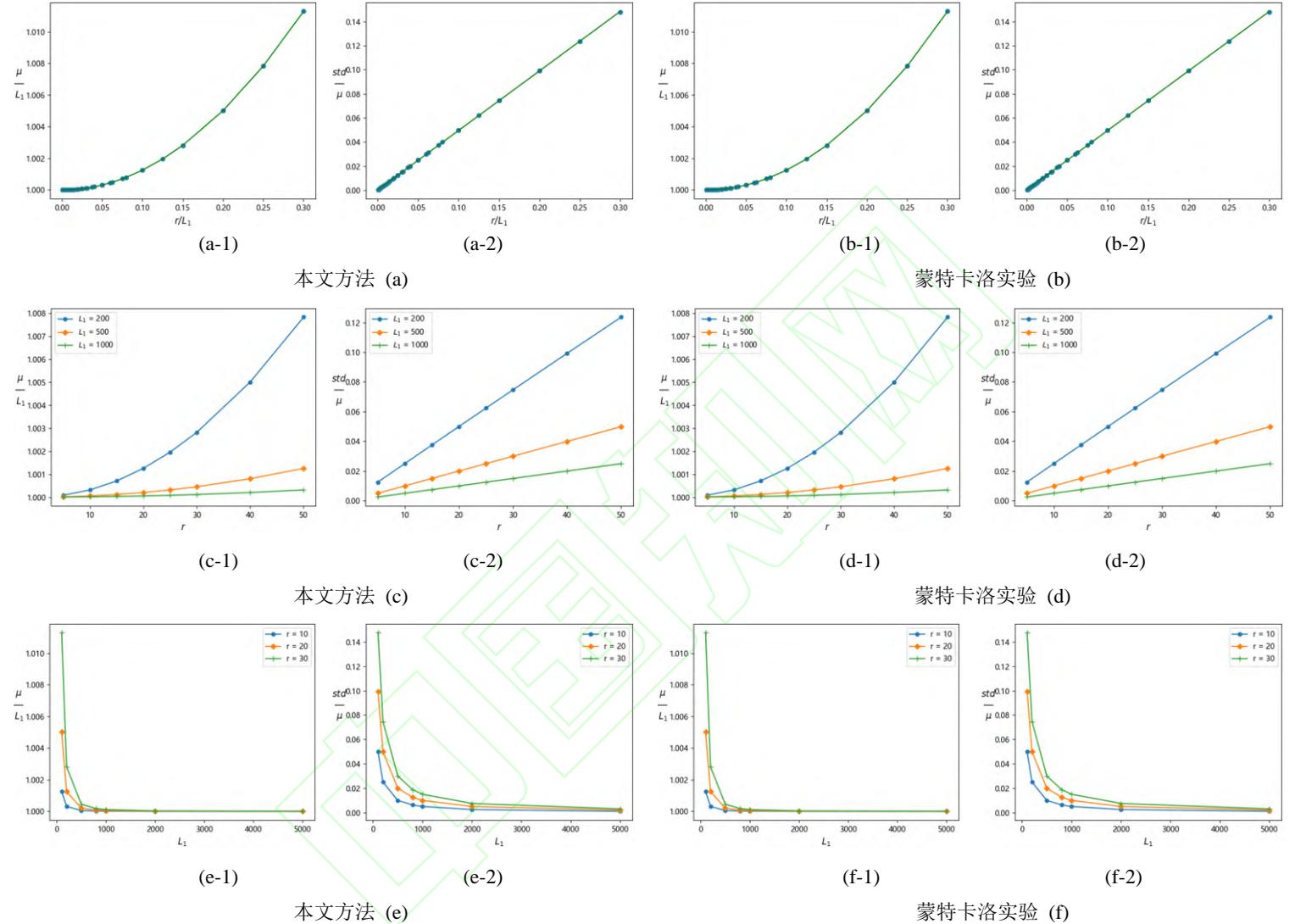


图 5 含有一个不确定性点的算例结果图
Fig. 5 Result graph with one uncertainty point

3.2 两个不确定点间的距离算例

误差圆半径 r 和点间观测距离 L_2 的设置参照 § 3.1。对于每一组 r 和 L_2 ，根据公式 (16) 计算距离变量 z 的均值 (μ)、方差 (D) 和标准差 (std)，并参照有关不确定性测度与数据处理的约定^[23]，运用蒙特卡洛实验同步验证，实验过程中样本容量仍设定为 10,000,000，结果表明，针对任意一组数据，

蒙特卡洛实验耗时均为本文方法的 10 倍以上。

选取部分 r 、 L_2 组合，分别以 r/L_2 、 r 和 L_2 为索引得到表 4-6。由表 4 可知，本文方法与蒙特卡洛方法计算得到的 μ/L_2 、 std/μ 数值趋于一致，说明了本文方法的有效性。另一方面，当误差圆半径 r 和距离 L_2 之比即 r/L_2 逐渐增大时， μ/L_2 与 std/μ 均有同步增大

的趋势，当 r/L_2 保持不变时，两者的值均保持稳定（近似不变）。

综合分析表 4-6 可得到针对两个不确定点间距离的结论：当误差圆半径 r 与两点间观测距离 L_2 同时改变时， r/L_2 与距离不确定性呈显著的正相关关系；当误差圆半径 r 保持不变时，距离不确定性与点间观测距离 L_2 呈显著的负相关关系；当点间观测距离 L_2 保持不变时，距离不确定性与误差圆半径 r 呈显著的正相关关系。该结论与 § 3.1 中针

对确定点和不确定点间距离所得到的结论一致，图 6 更加直观地佐证了该结论。

比较图 5 与图 6 可知，确定点和不确定点间距离与两个不确定点间距离的不确定性变化规律类似，但后者的不确定性大于前者，说明不确定点的个数直接影响距离不确定性的程度，但并不改变其总体变化趋势，为进一步推导三个及多个不确定点间的距离不确定性奠定了基础。

表 4 以 r/L_2 为索引的算例结果比较

Tab.4 Result comparison of computational cases with r/L_2 as index

r/L_2	r	L_2	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_2	std/μ	μ	D	μ/L_2	std/μ
0.0100	5	500	500.012500	12.499689	1.000025	0.007071	500.012922	12.493954	1.000026	0.007069
0.0100	20	2000	2000.050001	199.995412	1.000025	0.007071	2000.050068	199.956489	1.000025	0.007070
0.0150	15	1000	1000.056251	112.494196	1.000056	0.010606	1000.056414	112.548126	1.000056	0.010608
0.0150	30	2000	2000.112503	449.976796	1.000056	0.010606	2000.113983	450.060931	1.000057	0.010607
0.0300	15	500	500.112511	112.476789	1.000225	0.021206	500.111022	112.333163	1.000222	0.021193
0.0300	30	1000	1000.225021	449.907158	1.000225	0.021206	1000.221528	450.010828	1.000222	0.021209
0.1000	5	50	50.125131	12.471252	1.002503	0.070453	50.125735	12.471594	1.002515	0.070453
0.1000	10	100	100.250262	49.885010	1.002503	0.070453	100.246080	49.881169	1.002461	0.070453
0.2000	10	50	50.502129	49.534985	1.010043	0.139363	50.503746	49.572405	1.010075	0.139411
0.2000	20	100	101.004258	198.139941	1.010043	0.139363	101.006135	198.041235	1.010061	0.139325

表 5 以 r 为索引的算例结果比较

Tab.5 Result comparison of computational cases with r as index

r	r/L_2	L_2	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_2	std/μ	μ	D	μ/L_2	std/μ
5	0.1000	50	50.125131	12.471252	1.002503	0.070453	50.125735	12.471594	1.002515	0.070453
5	0.0100	500	500.012500	12.499689	1.000025	0.007071	500.012922	12.493954	1.000026	0.007069
10	0.2000	50	50.502129	49.534985	1.010043	0.139363	50.503746	49.572405	1.010075	0.139411
10	0.1000	100	100.250262	49.885010	1.002503	0.070453	100.246080	49.881169	1.002461	0.070453
15	0.0300	500	500.112511	112.476789	1.000225	0.021206	500.111022	112.333163	1.000222	0.021193
15	0.0150	1000	1000.056251	112.494196	1.000056	0.010606	1000.056414	112.548126	1.000056	0.010608
20	0.2000	100	101.006747	198.155166	1.010067	0.139365	101.006135	198.041235	1.010061	0.139325
20	0.0100	2000	2000.050001	199.995412	1.000025	0.007071	2000.050068	199.956489	1.000025	0.007070
30	0.0300	1000	1000.225021	449.907158	1.000225	0.021206	1000.221528	450.010828	1.000222	0.021209
30	0.0150	2000	2000.112503	449.976796	1.000056	0.010606	2000.113983	450.060931	1.000057	0.010607

表 6 以 L_2 为索引的算例结果比较

Tab.6 Result comparison of computational cases with L_2 as index

L_2	r/L_2	r	本文方法				蒙特卡洛实验			
			μ	D	μ/L_2	std/μ	μ	D	μ/L_2	std/μ
50	0.2000	10	50.502129	49.534985	1.010043	0.139363	50.503746	49.572405	1.010075	0.139411
50	0.1000	5	50.125131	12.471252	1.002503	0.070453	50.125735	12.471594	1.002515	0.070453
100	0.2000	20	101.004258	198.139941	1.010043	0.139363	101.006135	198.041235	1.010061	0.139325
100	0.1000	10	100.250262	49.885010	1.002503	0.070453	100.246080	49.881169	1.002461	0.070453
500	0.0300	15	500.112511	112.476789	1.000225	0.021206	500.111022	112.333163	1.000222	0.021193
500	0.0100	5	500.012500	12.499689	1.000025	0.007071	500.012922	12.493954	1.000026	0.007069
1000	0.0300	30	1000.225021	449.907158	1.000225	0.021206	1000.221528	450.010828	1.000222	0.021209
1000	0.0150	15	1000.056251	112.494196	1.000056	0.010606	1000.056414	112.548126	1.000056	0.010608
2000	0.0150	30	2000.112503	449.976796	1.000056	0.010606	2000.113983	450.060931	1.000057	0.010607
2000	0.0100	20	2000.050001	199.995412	1.000025	0.007071	2000.050068	199.956489	1.000025	0.007070

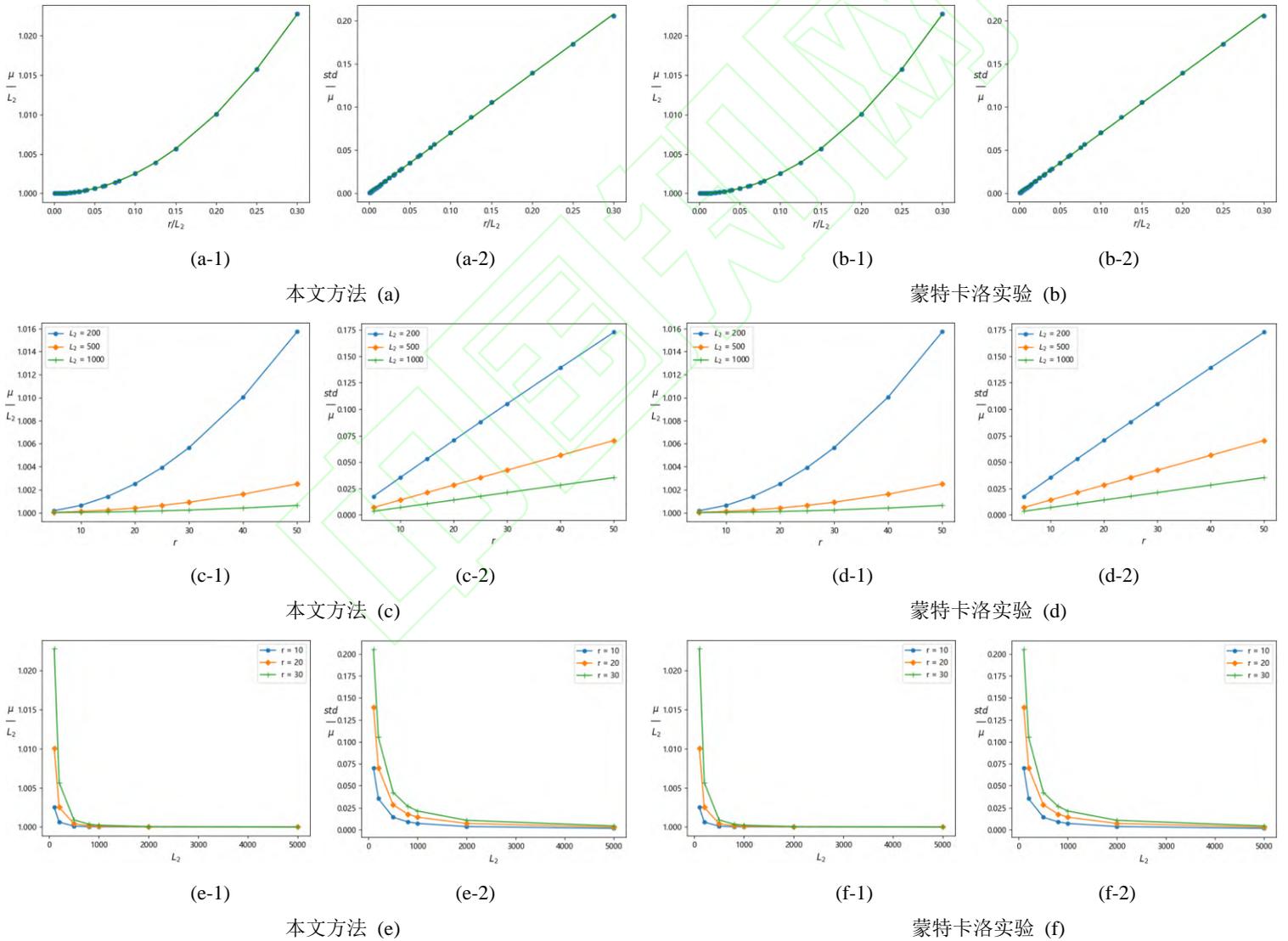


图 6 两个不确定点的算例结果图
 Fig. 6 Result graph with two uncertainty points

4 结论

本文推导了确定点与不确定点间以及两个不确定点间距离不确定性的分布函数和密度函数,并利用后者研究了点位不确定性向距离不确定性传递的规律,为距离不确定性研究开辟了新的途径。结论如下:

(1) 与距离不确定性研究领域常用的泰勒展开式等方法相比,本文提出的方法从理论上给出了距离不确定性的分布函数和分布密度,所建立的计算模型复杂度低、易于编程实现。

(2) 确定点和不确定点间距离以及两个不确定点间距离不确定性均服从如下规律:当误差圆半径 r (对应点位精度) 与点间观测距离 L_1 或 L_2 同时改变时,二者之比 r/L_1 或 r/L_2 与距离不确定性呈显著的正相关关系;当 r 保持不变时,距离不确定性与 L_1 或 L_2 呈显著的负相关关系;当 L_1 或 L_2 保持不变时,距离不确定性与 r 呈显著的正相关关系。

(3) 当点位精度与点间观测距离一致时,两个不确定点间距离的不确定性大于确定点和不确定点间距离的不确定性。

本文所有推导、计算均假设不确定点的实际位置在以其观测位置为圆心的误差圆内服从完全空间随机分布,如何将本文构建的模型进一步推广到实际点位在误差椭圆内完全空间随机分布、或者在误差圆内非完全空间随机分布以及包含三个与三个以上不确定点的情形是后续研究的目标。

参考文献

- [1] Li Jiancheng. Study and Progress in Theories and Crucial Techniques of Modern Height Measurement in China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(11): 980-987 (李建成. 我国现代高程测定关键技术若干问题的研究及进展[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2007, 32(11): 980-987)
- [2] Wang Zhaoyi, He Xiaoye, Wang Wei, et al. High Precision Pre-Alignment Method Based on Laser Tracker[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(4): 555-560 (汪昭义, 何晓业, 王巍, 等. 激光跟踪仪的高精度预准直方法和精度分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(4): 555-560)
- [3] Guo Renzhong. *Spacial Analysis*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (郭仁忠. 空间分析[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2001)
- [4] EGENHOFER M J, FRANZOSA R D. Point-Set Topological Spatial Relations[J]. *International Journal of Geographical Information Systems*, 1991, 5(2): 161-174
- [5] Chen J, Li C M, Li Z L, et al. A Voronoi-Based 9-Intersection Model for Spatial Relations[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2001, 15(3): 201-220
- [6] Yan Haowen. *On Theories of Spatial Directional Relationships*[M]. Chengdu: Chengdu Cartographic Publishing House, 2003. (闫浩文. 空间方向关系理论研究[M]. 成都: 成都地图出版社, 2003)
- [7] Mao Zhengyuan, Li Lin. *The Measurement of Spatial Patterns and Its Application*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (毛政元, 李霖. 空间模式的测度及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004)
- [8] Li Lin, Ying Shen. Fundamental Problem on Spatial Scale[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2005, 30(3): 199-203 (李霖, 应申. 空间尺度基础性问题研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2005, 30(3): 199-203)
- [9] Shi Wenzhong. *Principles of modeling uncertainties in spatial data and spatial analyses*[M]. Beijing: Science Press, 2015. (史文中. 空间数据与空间分析不确定性原理[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2015)
- [10] Wu Lun, Cheng Jicheng, Shi Wenzhong. Data Uncertainties in Geographic Information System[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2006, 31(5): 13-17 (邬伦, 承继成, 史文中. 地理信息系统数据的不确定性问题[J]. 测绘科学, 2006, 31(5): 13-17)
- [11] Gil de la Vega P, Ariza-López F J, Mozas-Calvache A T. Models for Positional Accuracy Assessment of

- Linear Features: 2D and 3D Cases[J]. *Survey Review*, 2016, 48(350): 347-360
- [12] Tong X H, Xie H, Liu S J, et al. Uncertainty of Spatial Information and Spatial Analysis[M]// *The Geographical Sciences During 1986—2015*. Singapore: Springer, 2017: 511-522
- [13] Cai Jianhong, Li Deren. Uncertainty Description of Random Error Point in GIS[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2010, 35(5): 18-20 (蔡剑红, 李德仁. GIS 中随机误差点位不确定性描述法研究[J]. *测绘科学*, 2010, 35(5): 18-20)
- [14] Du Shihong, Wang Qiao. Uncertain Spatial Relations[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2004, 9(5): 539-546 (杜世宏, 王桥. 不确定性空间关系[J]. *中国图象图形学报*, 2004, 9(5): 539-546)
- [15] Leung Y, Ma J H, Goodchild M F. A General Framework for Error Analysis in Measurement-Based GIS Part 4: Error Analysis in Length and Area Measurements[J]. *Journal of Geographical Systems*, 2004, 6(4): 403-428
- [16] KIIVERI H T. Assessing, Representing and Transmitting Positional Uncertainty in Maps[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1997, 11(1): 33-52
- [17] Leung Y, Yan J P. A Locational Error Model for Spatial Features[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1998, 12(6): 607-620
- [18] Xue J, Leung Y, Ma J H. High-Order Taylor Series Expansion Methods for Error Propagation in Geographic Information Systems[J]. *Journal of Geographical Systems*, 2015, 17(2): 187-206
- [19] Xue S Q, Yang Y X, Dang Y M. Formulas for Precisely and Efficiently Estimating the Bias and Variance of the Length Measurements[J]. *Journal of Geographical Systems*, 2016, 18(4): 399-415
- [20] Liu Yixu, Qu Guoqing, Xue Shuqiang, et al. Analysis on GNSS Length Measurement Uncertainty[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2019, 44(5): 157-163 (刘以旭, 曲国庆, 薛树强, 等. GNSS 长度测量不确定性试验分析[J]. *测绘科学*, 2019, 44(5): 157-163)
- [21] Hanus P, Peška-Siwik A, Szweczyk R. Spatial Analysis of the Accuracy of the Cadastral Parcel Boundaries[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2018, 144: 9-15
- [22] Hanus P, Peška-Siwik A, Benduch P, et al. Comprehensive Assessment of the Quality of Spatial Data in Records of Parcel Boundaries[J]. *Measurement*, 2020, 158: 107665
- [23] JCGM 101. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method[OL]. https://www.bipm.org/documents/2012/2/07/1204/JCGM_101_2008_E.pdf325dcaad-c15a-407c-105-8b7f322d651c, 2008

Methodological Research on Measuring Distance Uncertainty in Two-Dimensional Space

MAO Zhengyuan^{1,2} FAN Linna^{1,2} LI Lin³

1 Academy of Digital China, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

2 Key Lab of Spatial Data Mining & Information Sharing of Ministry of Education,
Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

3 School of Resource and Environmental Sciences, Wuhan University,
Wuhan 430079, China

Abstract: Objectives: Distances are functions of spatial positions. Precisely revealing the functional relationship which quantitatively embodies the transmission of uncertainty from spatial positions to their distance, a key scientific problem in need of

being solved urgently in Geoinformatics, has important theoretical and practical significance. Methods: Aiming at the limitation of presently available solution of the above mentioned problem, under the premise of that the real position corresponding with the observed position of an uncertain point obeys the complete spatial random distribution within the error circle, this article derived the probability distribution function of distance uncertainty and the corresponding density function between a certain point and an uncertain point and between two uncertain points respectively in two-dimensional space. The latter has been employed to explore the transmission law of point uncertainty to distance uncertainty, opening up a new way for studying and solving the problem of distance uncertainty. Results: The results show that for all cases: (1) When the radius of the error circle (corresponding to the point position accuracy) and the observation distance between points change simultaneously, their ratio has a significant positive correlation with distance uncertainty. (2) When the former remains constant, the distance uncertainty has a significant negative correlation with the latter. (3) When the latter remains constant, the distance uncertainty has a significant positive correlation with the former. Conclusions: As far as distance uncertainty of cases containing an uncertain point and the one of those between two uncertain points are concerned, the latter is obviously greater than the former when the radius of the error circle and the observation distance between points are consistent for both of them. Otherwise they are not comparable.

Key words : Distance; Uncertainty; Two-dimensional space; Point position; Measurement methods

First author: MAO Zhengyuan, PhD, professor, specializes in Cognition and measurement of spatiotemporal systems. E-mail: zymao@fzu.edu.cn.

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China (40471113, 40871206); The commission of the General Survey Brigade of Jiangxi Coalfield Geology Bureau (01022103)

网络首发:

标题: 二维空间中距离不确定性的测度方法研究

作者: 毛政元, 范琳娜, 李霖

DOI: 10.13203/j.whugis20220131

收稿日期: 2022-03-14

引用格式:

毛政元, 范琳娜, 李霖. 二维空间中距离不确定性的测度方法研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220131 (MAO Zhengyuan, FAN Linna, LI Lin. Methodological Research on Measuring Distance Uncertainty in Two-Dimensional Space[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220131)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别，请以正式出版文件为准！

您感兴趣的其他相关论文：

三维空间多边形的位置不确定性度量模型

卞玉霞, 刘学军, 甄艳

武汉大学学报 信息科学版, 2015, 40(1): 26-31

<http://ch.whu.edu.cn/article/id/3152>

