



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860,CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型统计特性分析
作者: 刘一, 边少锋, 纪兵, 周威
DOI: 10.13203/j.whugis20220021
收稿日期: 2022-04-02
网络首发日期: 2022-05-05
引用格式: 刘一, 边少锋, 纪兵, 周威. 北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型统计特性分析[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版).
<https://doi.org/10.13203/j.whugis20220021>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

引用格式：

刘一, 边少锋, 纪兵, 等. 北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型统计特性分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220021 (LIU Yi, BIAN Shaofeng, JI Bing, et al. Analysis of Statistic Testing of Elevation-Dependent Stochastic Models of BDS-3 Satellite Observation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220021)

北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型 统计特性分析

刘一¹ 边少锋¹ 纪兵¹ 周威¹

¹ 海军工程大学电气工程学院, 湖北 武汉, 430030

摘要：观测信息随机模型在参数估计、质量控制和精度评定过程中具有重要作用, 准确的观测信息随机模型是北斗精密定位的基础。首先, 利用简化的 Helmert 方差估计方法估计北斗三号卫星观测信息精度, 并拟合模型系数; 然后, 利用全局检验和 ω 检验对基于分段函数、正弦函数、余弦函数和指数函数的随机模型进行统计检验, 分析随机模型统计特性; 最后, 利用精密单点定位 (precise point positioning, PPP) 检验各随机模型对定位性能的影响。实验数据表明, 北斗三号卫星的伪距和载波相位观测值精度均与高度角相关, 且观测类型不同, 相关程度不同; 基于指数函数的随机模型在拟合误差、全局检验和 ω 检验中均表现出最优的性能, 全局检验浮点解和固定解误警率仅为 5.1% 和 4.9%, ω 检验伪距和载波相位最大误警率分别为 5.8% 和 6.8%, PPP 收敛时间最短, 定位精度最高。基于指数函数的随机模型能够准确描述北斗观测信息精度, 提高北斗三号卫星精密定位结果的精度和可靠性。

关键词：北斗卫星导航系统; 随机模型; 高度角相关; 全局检验; ω 检验

中图分类号: P228.4

文献标识码: A

观测信息随机模型描述了观测信息的精度及其相关关系, 通常以方差-协方差矩阵的形式出现, 在全球导航卫星系统 (global navigation satellite system, GNSS) 精密数据处理参数估计、质量控制和精度评定等方面均有着重要的作用^[1-3]。在精密定位过程中, 准确的随机模型将对定位精度和可靠性的提升起到积极作用^[4-7], 因此, 构造准确的观测信息随机模型是精密定位的基础。中

国独立建设、自主运营的北斗卫星导航系统 (BeiDou navigation satellite system, BDS) 已经建成, 向全球用户提供定位、导航和授时服务 (positioning, navigation, and timing, PNT)^[8], 以 BDS 精密数据处理技术为核心的无人驾驶、移动物联网和智慧城市等高新技术应用得到广泛发展, 然而, 日益增长的时空信息服务需求对 BDS 的定位精度和可靠性提出了更高的要求^[9], 研究适用于 BDS

收稿日期: 2022-04-02

项目资助: 国家自然科学基金 (42174051, 41971416, 41874091); 海军工程大学研究生创新基金项目 (DQCXJJ2021004, DQCXJJ2021005); 海军工程大学自主立项项目 (2019055)。

第一作者: 刘一, 博士生, 主要从事 GNSS 精密数据处理研究。liuyinue@sina.cn

通讯作者: 边少锋, 博士, 教授。sfbian@sina.com

的观测信息随机模型,提高精密定位精度和可靠性,对于提升 BDS 应用水平具有重要的意义。

当前,国内外许多学者针对 GNSS 观测信息随机模型进行了广泛而深入的研究,提出了基于信噪比和高度角的随机模型^[10-11],其中基于高度角的随机模型应用较为广泛,主要有基于分段函数、正弦函数、余弦函数和指数函数的随机模型^[12-14],模型参数根据经验或者拟合给出。针对观测值随机特性,文献[15]系统阐述了观测值随机模型在质量控制中的作用,评价了全球卫星定位系统(global positioning system, GPS)观测信息的随机特性,给出了随机模型精化方法,提出了一种改进的 SIGMA- Δ 随机模型,提高了 GPS 单历元相对定位的精度和可靠性。针对随机模型统计特性,文献[16]利用双频 GPS 数据分析了基于常数、正弦函数和指数函数的随机模型对于统计检验的影响,指出 GPS 观测数据精度与高度角相关,且观测类型不同,相关程度不同。文献[17]在分析 BDS 混合星座观测值特性的基础上,提出混合星座随机模型,对地球静止轨道卫星采用基于信噪比的随机模型,对于倾斜地球同步轨道卫星和中圆地球轨道卫星采用基于高度角的随机模型,有效提高了 BDS 相对定位的模糊度固定率和定位精度。文献[18]利用中国境内测站观测的多星座数据解算 BDS 和 GPS 系统静态观测数据,对比分析 BDS 和 GPS 基线解算精度。

当前 GNSS 观测信息随机模型的研究主要针对 GPS 观测值,而 BDS 观测信息随机模型的研究主要集中在 BDS-2,关于 BDS-3 观测信息随机模型的研究还相对较少,因此本文从 BDS-3 观测信息随机模型的统计特性出发,分析 4 种经典的基于高度角的随机模型对统计检验的影响,给出 BDS-3 适用的随机模型,从而提高 BDS 定位精度和可靠性。

1 参数估计与统计检验

高斯-马尔可夫模型公式为:

$$E\{\mathbf{y}\} = \mathbf{A}\mathbf{x}, D\{\mathbf{y}\} = \mathbf{Q}_y \quad (1)$$

式中, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望; $D\{\cdot\}$ 表示方差; \mathbf{y} 为 $m \times 1$ 维观测值向量, m 为观测值个数; \mathbf{x} 为 $n \times 1$ 维未知参数向量, n 为未知参数个数; \mathbf{A} 为 $m \times n$ 维设计矩阵,反映观测值与未知参数之间的几何关系或物理关系,是函数模型的具体体现; \mathbf{Q}_y 是观测值方差-协方差矩阵,反映了观测值的随机特性,是随机模型的具体体现。

由最小二乘法得到未知参数估值 $\hat{\mathbf{x}}$ 为:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (2)$$

观测值残差估值 $\hat{\mathbf{e}}$ 为:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_A) \mathbf{y} = \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{y} \quad (3)$$

式中, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ 为观测量 \mathbf{y} 的估值; \mathbf{I} 为单位矩阵; $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1}$, 称为投影算子。

$\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{e}}$ 的方差-协方差矩阵分别为:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}} = \mathbf{Q}_y - \mathbf{Q}_y \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{Q}_y (\mathbf{P}_A^\perp)^T \quad (5)$$

当观测量无异常观测时,最小二乘解具有最优无偏性。全局检验通过检验单位权方差估值和理论值之间的差异来评价模型整体的准确度,全局检验统计量 T_{m-n} 的计算式为:

$$T_{m-n} = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \hat{\mathbf{e}}}{m-n} \quad (6)$$

在不存在异常观测时, T_{m-n} 服从自由度为 $m-n$ 的 Fisher 分布,即 $T_{m-n} \sim F(m-n, \infty)$, 给定显著水平 α , 如果 $T_{m-n} < F_{1-\alpha}(m-n, \infty)$, 则认为观测值中不含粗差,接受原假设,否则拒绝原假设。当单位权方差估值和理论值接近时, T_{m-n} 数学期望等于 1。

在全局检验检测到观测值中包含粗差观测时,为了准确定位粗差位置,利用 ω 检验^[19-20]进行粗差定位,用于评价模型描述观测值观测误差的准确度, ω 检验统计量为:

$$\omega_i = \frac{c_i^T \mathbf{Q}_y^{-1} \hat{\mathbf{e}}}{\sqrt{c_i^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}} \mathbf{Q}_y^{-1} c_i}} \quad (7)$$

式中, c_i 为 $m \times 1$ 维向量,第 i 行元素为 1,其余元素均为 0。 ω_i 服从零均值正态分布,即 $\omega_i \sim N(0,1)$, 给定置信水平 α , 确定置信区间,如果 $|\omega_i| < N_{(1-\alpha)/2}$, 则认为该

观测值不是粗差，否则认为是粗差。

由上述推导过程可知，对于参数估值精度而言，理论上任意的 Q_y 均可得到统计意义上无偏的未知参数估值，但对于单次的观测，随机模型分配观测值权值，对估值的准确性具有重要的影响；对于精度评定而言， Q_y 作用于未知参数方差-协方差矩阵，对精度评定指标产生影响；对于质量控制而言， Q_y 的准确度作用于全局检验和 ω 检验的统计量，对定位结果可靠性产生影响。设 $\frac{Q_y}{Q_x} = \beta$ ，则

随机模型对估值精度、估值方差-协方差、全局检验和 ω 检验统计量估值与理论值的关系为： $E\{\hat{x}\} = x$ ， $E\{Q_x\} = \beta Q_x$ ， $E\{\hat{T}_{m-n}\} = \beta T_{m-n}$ ， $E\{\hat{\omega}_i\} = \omega_i/\sqrt{\beta}$ 。

2 单历元单差观测模型

利用单差相对定位模型估计观测值精度，可以保留观测精度和高度角的关系。当基线距离较小时，测站间的大气相关性较强，站间差分可以消除大气延迟误差以及卫星相关误差，假设两台接收机可同时观测 m 颗卫星，则观测方程为：

$$\phi_{k,j} = \rho_k + e_m \delta t_{\phi_{k,j}} - \lambda_j a_j + \varepsilon_{\phi_{k,j}} \quad (8)$$

$$P_{k,j} = \rho_k + e_m \delta t_{P_{k,j}} + \varepsilon_{P_{k,j}} \quad (9)$$

式中， k 和 j 分别表示历元和频率； $\phi_{k,j}$ 和 $P_{k,j}$ 为单差相位和伪距观测值，单位为 m； ρ_k 为站间卫地距之差； $\delta t_{\phi_{k,j}}$ 和 $\delta t_{P_{k,j}}$ 为单差相位和伪距接收机钟差； e_m 为 m 维向量，元素均为 1； λ 为波长； a 为单差模糊度，单位为周， $a_j = [a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m]^T$ ； $\varepsilon_{\phi_{k,j}}$ 和 $\varepsilon_{P_{k,j}}$ 为观测值噪声。

由于式（8）和式（9）构成的设计矩阵秩亏，为消除秩亏，并恢复模糊度参数的整数特性，需要对上述观测方程重新参数化。选取高度角最高的 1 号卫星作为基准星，将其模糊度参数与钟差参数合并，重新参数化后的观测方程为：

$$\phi_{k,j} = \rho_k + e_m \bar{\delta} t_{\phi_{k,j}} - \lambda_j \bar{a}_j + \varepsilon_{\phi_{k,j}} \quad (10)$$

式中， $\bar{\delta} t_{k,j}$ 为重新参数化后的接收机钟

差，包含接收机钟差误差和参考卫星模糊度参数， $\bar{\delta} t_{k,j} = \delta t_{\phi_{k,j}} - \lambda_j a_j^1$ ； \bar{a}_j 为重新参数化后的模糊度向量， $\bar{a}_j = [0, \bar{z}_j^T]^T$ 。

若短基线或零基线 ρ_k 为已知值，估计浮点模糊度并固定模糊度，则式（8）、式（9）可改写为：

$$\bar{\phi}_{k,j} = e_m \bar{\delta} t_{\phi_{k,j}} + \varepsilon_{\phi_{k,j}} \quad (11)$$

$$\bar{P}_{k,j} = e_m \bar{\delta} t_{P_{k,j}} + \varepsilon_{P_{k,j}} \quad (12)$$

式中， $\bar{\phi}_{k,j} = \phi_{k,j} - \rho_k$ ， $\bar{P}_{k,j} = P_{k,j} - \rho_k$ 。

3 简化的 Helmert 方差分量估计

本文利用简化的 Helmert 方差分量估计方法估计观测信息精度^[21]。短时间内卫星高度角变化较小，认为在一定时间内观测值方差相同，因此本文采用 n 历元估计一个方差的方法，取 $n = 10$ 。 n 历元观测方程为：

$$\bar{\phi}_j = (I_n \otimes e_m) \bar{\delta} t_j + \varepsilon_{\bar{\phi}_j} \quad (13)$$

式中， \otimes 为克罗内克积； I_n 为 n 维单位矩阵； $\bar{\phi}_j = [(\bar{\phi}_j^1)^T, \dots, (\bar{\phi}_j^m)^T]^T$ 为 n 历元 m 颗卫星的单差观测值， $\bar{\phi}_j^i = [\bar{\phi}_{1,j}^i, \dots, \bar{\phi}_{n,j}^i]^T$ 为第 i 颗卫星 n 历元的单差观测值； $\bar{\delta} t_j = [\bar{\delta} t_{1,j}^1, \dots, \bar{\delta} t_{n,j}^1]^T$ 为 n 历元接收机钟差； $\varepsilon_{\bar{\phi}_j} = [(\varepsilon_j^1)^T, \dots, (\varepsilon_j^m)^T]^T$ 为 n 历元 m 颗卫星的单差观测噪声， $\varepsilon_j^i = [\varepsilon_{1,j}^i, \dots, \varepsilon_{n,j}^i]^T$ 为第 i 颗卫星 n 历元的单差观测噪声。

假设卫星在 n 历元下方差不变，则其方差-协方差矩阵为：

$$Q_{\bar{\phi}_j} = 2(I_n \otimes Q_{\phi_j}) \quad (14)$$

式中， Q_{ϕ_j} 为 n 历元 j 频点 m 颗卫星的非差观测值方差， $Q_{\phi_j} = \text{diag}[(\sigma_{\phi_j^1}^1)^2, \dots, (\sigma_{\phi_j^m}^m)^2]$ ，计算式为：

$$\hat{\sigma}_{\phi_j}^i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\hat{\epsilon}_{\phi_{k,j}}^i)^2}{2nr_j^i}} \quad (15)$$

式中， $\hat{\epsilon}_{\phi_{k,j}}^i$ 为单差观测噪声； $r_j^i = (m-1)/m$ 。该观测值精度对应的高度角为 n 历元平均高度角。

4 数据分析

在目前主流的 GNSS 数据处理软件中，PANDA 采用分段的正弦函数构建随机模型（模型 A）^[12]，GAMIT 采用正弦函数模型（模型 B）^[13]，Bernese 采用余弦函数模型（模型 C）^[14]，文献[16]提出指数函数随机模型（模型 D）。上述 4 种模型的计算式分

别为：

$$\sigma = \begin{cases} a, & E \geq 30 \\ \frac{a}{2 \sin(E)}, & E < 30 \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma = \sqrt{a + b/\sin(E)} \quad (17)$$

$$\sigma = \sqrt{a + b \cos(E)} \quad (18)$$

$$\sigma = a + b * \exp(-E/c) \quad (19)$$

式中， σ 为观测值精度； a 、 b 、 c 均为模型系数； E 为高度角。

本文采用 3 组基线的观测数据进行实验，每组基线的两台接收机为同品牌接收机，基线详细信息见表 1。数据采集时间为 2021 年年积日（day of year, DOY）第 340~341 天，采样间隔 30 s，数据处理采用 BDS-3 B1I、B3I、B1C 和 B2a 4 个频点观测数据，高度截止角为 10° 。

表1 基线详细信息

Tab. 1 Details of Baselines

基线	接收机	天线	距离/m	位置（经度，纬度）
MG04-MG05	JAVAD TRE3	JAVRINGANT	69.4798	-104.02° W, 30.68° N
HG01-HG02	Unicore UB4B0	TRM 39105.00	0	114.24° E, 30.58° N
BJ01-BJ02	CHC P5	Harxon GPS1000	0	115.89° E, 39.60° N

4.1 观测值精度与模型拟合误差

利用 2021 年 DOY340 观测数据，估计相位和伪距观测精度，并求解模型系数，相位和伪距观测精度以及 4 种模型的拟合曲线（限于篇幅只展示 MG04-MG05 基线），如图 1、图 2 所示，拟合误差见表 2。

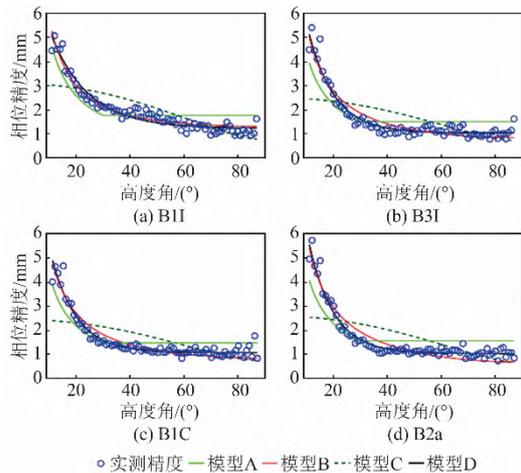


图1 相位观测值精度与随机模型建模

Fig.1 Accuracy of Carrier Phase Observations and Modeling of Four Stochastic Models

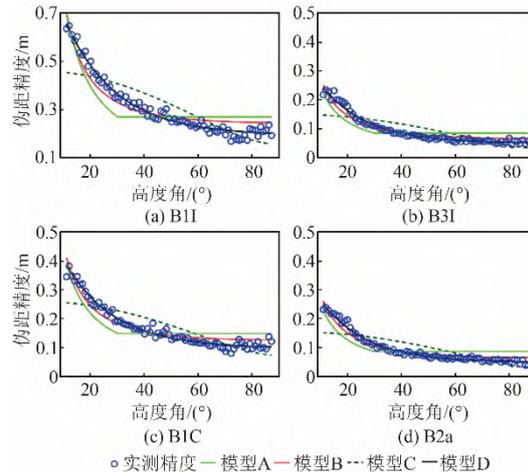


图2 伪距观测值精度与随机模型建模

Fig.2 Accuracy of Code Observations and Modeling of Four Stochastic Models

表2 4种随机模型的拟合误差

Tab. 2 Modeling Errors of Four Stochastic Models

基线	频点	相位/mm				伪距/m			
		模型A	模型B	模型C	模型D	模型A	模型B	模型C	模型D
MG04-MG05	B1I	19.628	4.464	34.014	4.564	0.303	0.126	0.386	0.029
	B3I	23.770	9.128	55.263	5.484	0.064	0.018	0.085	0.005
	B1C	17.835	6.364	45.534	3.687	0.125	0.042	0.161	0.015
	B2a	28.847	9.621	63.967	3.559	0.070	0.016	0.093	0.004
HG01-HG02	B1I	0.117	0.058	0.022	0.018	0.020	0.016	0.013	0.012
	B3I	0.149	0.076	0.067	0.037	0.007	0.006	0.005	0.004
	B1C	0.170	0.078	0.243	0.039	0.195	0.171	0.329	0.048
	B2a	0.399	0.090	0.766	0.062	0.081	0.076	0.197	0.016
BJ01-BJ02	B1I	0.103	0.052	0.108	0.013	0.029	0.012	0.011	0.011
	B3I	0.589	0.282	0.181	0.062	0.001	0.001	0.001	0.001
	B1C	0.141	0.033	0.259	0.007	0.013	0.009	0.004	0.003
	B2a	2.842	1.027	3.437	0.151	0.001	0.001	0.002	0.001

由图 1、图 2 可知, BDS-3 的 B1I、B3I、B1C 和 B2a 4 个频点的相位和伪距观测值精度均与高度角有相关关系, 但相关程度与频点和观测类型有关。BDS-3 不同频点间载波相位观测值精度与高度角相关性差异较小, 伪距观测值则差异较大, 伪距观测值 B1I 和 B1C 观测精度与高度角相关程度较大, 而 B3I 和 B2a 的相关性有所下降。B3I、B1C、B2a 载波相位观测值在高度角大于 30° 时, 观测精度趋于稳定, B1I 载波相位观测精度随高度角升高而提高, 在高度角大于 30° 时, 精度提升速度放缓; 而伪距则不存在此差异, 全部类型观测值精度随高度角升高而提高, 精度提升速度在高度角大于 30° 时逐渐放缓。在观测精度和高度角的相关关系方面, 其余两种接收机观测精度与高度角的关系与图示接收机相似, 差异主要在于不同接收机的观测精度差异较大, 国产品牌接收机输出的伪距经过相位平滑, 观测精度较高。

4 种模型在不同的高度角范围, 描述观测信息精度的能力不同:

1) 对于模型 A, 当高度角小于 30° 时, 模型处理精度较为乐观, 模型精度高于实际观测精度; 当高度角大于 30° 时, 模型处理精度稍显保守, 实际观测精度大于模型处理精度, 且随着高度角增大, 模型与实际观测

精度差异变大。

2) 对于模型 B, 对相位观测精度均能够较准确地刻画, 对于伪距观测值的 B3I、B1C 和 B2a 频点精度能够准确描述, B1I 频点在低高度角时表现较差。当高度角在 20°~30° 区域时, 模型对 B3I、B1C 和 B2a 载波相位观测精度处理略显保守, 实际观测精度大于模型处理精度, 其余高度角区段, 模型处理精度较为准确。

3) 对于模型 C, 当高度角大于 60° 时, 对相位和伪距观测精度均能较准确地处理, 但其余部分精度处理表现较差。以高度角 20° 为界, 大高度角部分则较保守, 低高度角部分处理较乐观。

4) 对于模型 D, 模型受 3 个参数调节, 表现较为灵活, 在可观测范围内, 对北斗各频点观测信息精度均能够准确的处理。

综上所述, BDS-3 观测信息精度均与高度角相关, 不同频点相同观测值相关程度不同, 相同频点不同观测类型相关程度不同。基于指数函数的模型 D 对各类观测信息的拟合误差最小, B3I 相位观测值拟合误差最大, 为 5.484; B1I 伪距观测值拟合误差最大, 为 0.048, 表现出较好的观测信息精度描述性能。

4.2 全局检验

基于 § 4.1 拟合的模型参数建立随机模型，利用 2021 年 DOY 341 的观测数据进行统计检验测试，线性化的观测方程为：

$$\mathbf{y}_k = B_k \mathbf{b}_k - A \bar{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{y_k} \quad (20)$$

式中， \mathbf{y}_k 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{y_k}$ 分别为观测量和观测噪声，包括相位和伪距观测值以及观测噪声； \mathbf{b}_k 为实参数向量，包括位置参数和接收机钟差参数； B_k 为其设计矩阵； $\bar{\mathbf{a}}$ 为整数参数向量，即模糊度参数； A 为其设计矩阵。

利用最小二乘法估计未知参数，得到浮点解为：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} & Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} \\ Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} & Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中， $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}_k$ 分别为整数参数和实数参数浮点解； Q 为方差-协方差矩阵。

利用最小二乘模糊度降低相关平差法（least squares ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA）进行模糊度固定，得到整数模糊度 $\bar{\mathbf{a}}$ ，求得实数参数 \mathbf{b}_k 的固定解及其方差-协方差分别为：

$$\bar{\mathbf{b}}_k = \hat{\mathbf{b}}_k - Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}) \quad (22)$$

$$Q_{\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}} = Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} - Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} Q_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}}^{-1} Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} \quad (23)$$

计算可得浮点解和固定解残差 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}$ 用于统计检验。假设当前历元可观测卫星为 m 颗，频率数 $n_f = 4$ ，则浮点解和固定解全局检验统计量分别为：

$$T_{float} = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}^T Q_{\hat{\mathbf{y}}_k}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}}{4m-7} \sim F(4m-7, \infty) \quad (24)$$

$$T_{fixed} = \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}^T Q_{\bar{\mathbf{y}}_k}^{-1} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y_k}}{8m-11} \sim F(8m-11, \infty) \quad (25)$$

计算浮点解和固定解全局检验统计量，并计算两种情况下置信水平为 0.95 时的临界值，绘制的散点图如图 3 所示。由于已知观测值中不含粗差观测值，理论上计算的 T 值均小于临界值，大于临界值的为误警，统计误警率和 T 均值，结果见表 3。

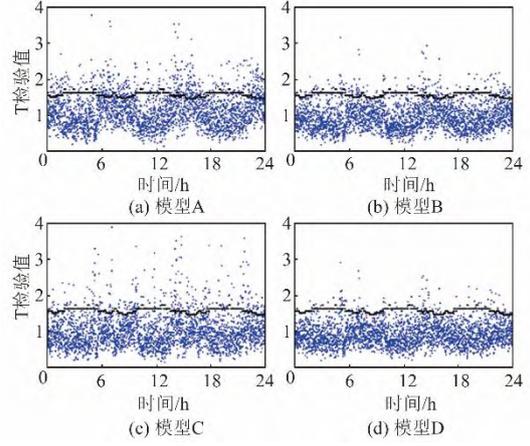


图3 4种随机模型的浮点解全局检验

Fig.3 Overall Statistics of the Float Solutions for Four

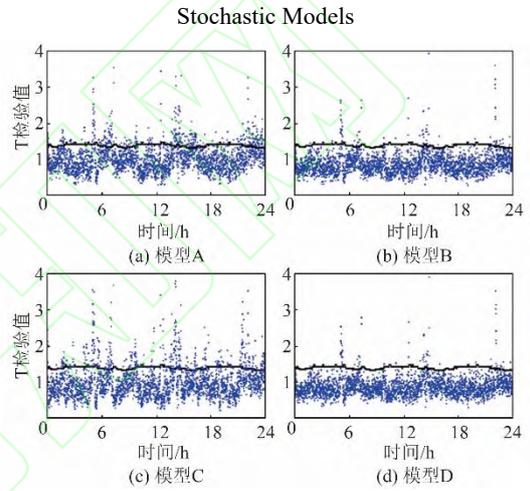


图4 4种随机模型的固定解全局检验

Fig.4 Overall Statistics of the Fixed Solutions for Four

Stochastic Models

由图 3、图 4 可知，全局检验浮点解误警率由低到高分别为：模型 D、模型 B、模型 C、模型 A，固定解误警率由低到高分别为模型 D、模型 B、模型 A、模型 C。模型 D 整体表现最优，浮点解和固定解误警率均小于 4%；模型 A 和模型 C 整体表现均较差，浮点解和固定解误警率均超过 10%；模型 C 的各观测值模型拟合误差均大于模型 A，但在浮点解全局检验中，误警率却小于模型 A，这是由于模型 A 在处理高度角大于 30° 的 BDS 观测精度时，实际观测精度较模型处理精度高， $\beta > 1$ ，计算的统计量大于真实的 T ，因此，表现出较高的误警率。模型 D 的浮点解和固定解全局检验统计量均值均最接近 1，差异分别为 0.01 和 0.03；模型 A 浮点解统计量均值与 1 差异最大，达 0.13；模型 C 固

定解统计量均值与 1 差异最大, 达 0.13。

综上, 基于指数函数的随机模型浮点解和固定解全局检验表现最优, 与模型拟合误

差性能基本一致, 在质量控制过程中, 较小的误警率可降低计算消耗, 准确的随机模型能有效降低误警率, 实现快速精密定位。

表3 4种随机模型的全局检验均值和误警率

Tab. 3 Means of Overall Test and Probabilities of False Alarm for Four Models

基线	解算模式	T均值				误警率/%			
		模型 A	模型 B	模型 C	模型 D	模型 A	模型 B	模型 C	模型 D
MG04-MG05	浮点	1.13	0.96	0.92	1.01	17.5	6.9	10.9	3.9
	固定	1.04	0.88	0.87	0.97	15.1	3.7	15.6	3.3
HG01-HG02	浮点	1.34	0.84	0.81	1.12	16.4	8.1	16.3	4.8
	固定	1.62	0.88	0.86	1.08	16.2	7.9	15.4	4.2
HG03-HG04	浮点	1.68	1.21	0.76	1.09	19.3	8.4	9.5	5.1
	固定	1.53	1.16	0.83	1.10	19.1	8.3	10.1	4.9

4.3 ω 检验

基于 § 4.2 中的固定解观测残差, 利用 ω 检验方法, 进一步研究随机模型对卫星观测量的影响, ω 检验统计量为:

$$\omega_i = \frac{c_{y_i}^T Q_{y_i}^{-1} \varepsilon}{\sqrt{c_i^T Q_{y_k}^{-1} Q_{\varepsilon_{y_k}} Q_{y_k}^{-1} c_y}} \quad (26)$$

图 5、图 6 分别为 BDS-3 观测信息在 4 种随机模型下载波和伪距观测值的 ω 检验散点图。已知观测值中无异常观测, 计算置信水平为 0.95 时的临界值, 统计各频点观测值超出临界值数量, 计算误警率, 结果见表 3,

由图 5、图 6 可知, 模型 A 在高度角大于 30° 时, 相位和伪距均表现出 ω 检验统计量较小的现象, 且随着高度角增大, 统计量

逐渐减小, 这是由于在对应高度角部分, 实际观测精度比模型给定精度高, $\beta > 1$, ω 检验统计量被缩小; 模型 B 在高度角小于 30° 时, B2a 载波相位观测值 ω 检验统计量被放大, 这与 § 4.1 中模型低高度角拟合精度表现一致; 模型 C 在高度角小于 30° 时, 相位和伪距的统计量均被放大, 而在大于 30° 小于 60° 时则有所缩小, 在大于 60° 时, 检验量分布趋于平稳; 模型 D 整体表现最优, 只在高度角大于 70° 时, 相位观测值 ω 检验统计量较小, 精度处理稍显保守。由表 4 中各观测值误警率可知, 模型 D 整体表现最优, 相位和伪距观测值误警率最高的均为 B2a 频点。

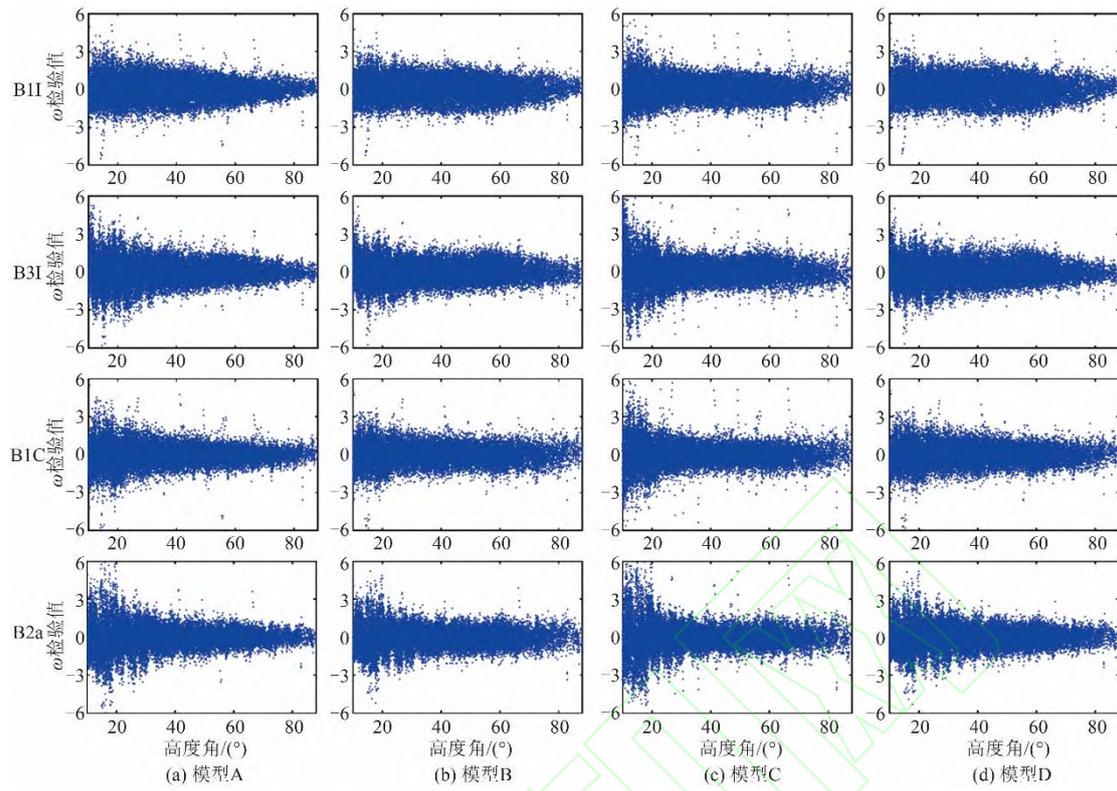


图5 4种随机模型下载波相位观测值 ω 检验

Fig.5 ω -test for All types of Carrier Phase Observations with Four Stochastic Models

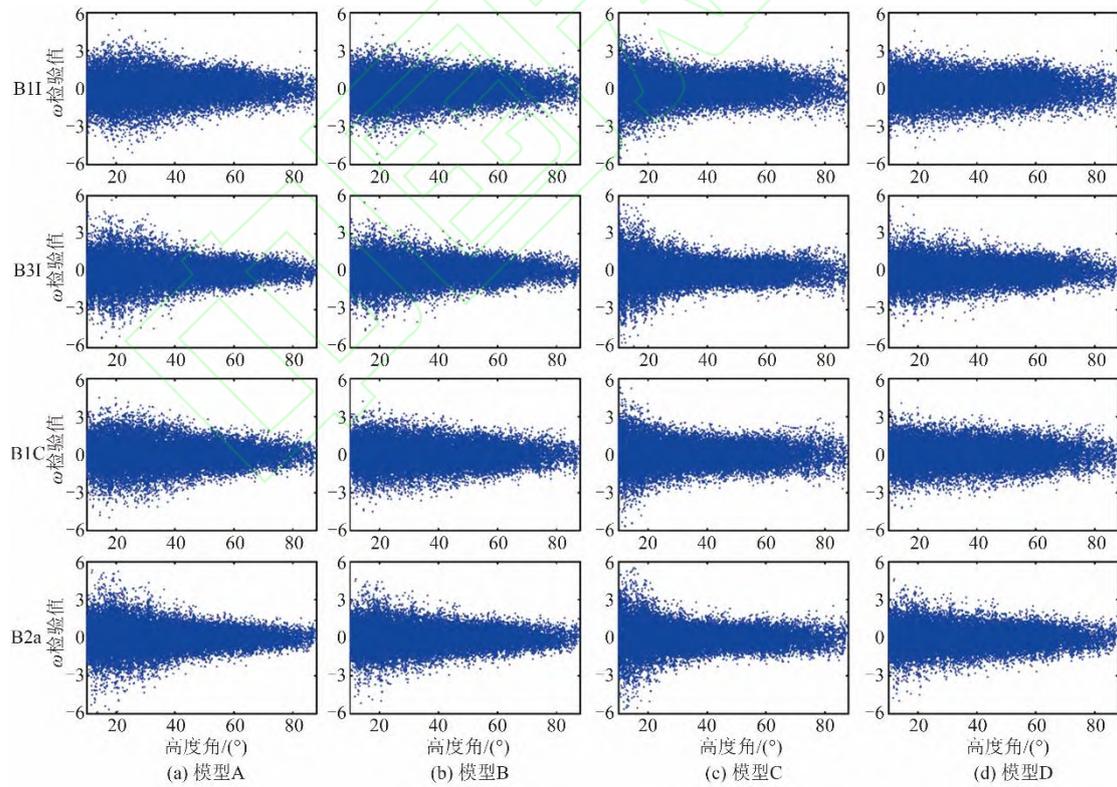


图6 4种随机模型下伪距观测值 ω 检验

Fig.6 ω -test for All types of Pseudorange Observations with Four Stochastic Models

表4 4种随机模型的 ω 检验误警率

Tab. 4 Probabilities of False Alarm of ω -test for Four Stochastic Models

基线	频点	相位/%				伪距/%			
		模型A	模型B	模型C	模型D	模型A	模型B	模型C	模型D
MG04-MG05	B1I	2.8	2.2	3.2	2.1	6.1	6.3	8	5.4
	B3I	8.4	6.1	9.1	5.2	7.2	6.0	8.8	5.3
	B1C	4.6	3.3	5.6	2.9	5.9	6.0	8.3	5.1
	B2a	9.1	6.7	9.9	5.8	7.1	6.2	9.0	5.4
HG01-HG02	B1I	8.9	4.0	5.4	3.5	6.3	5.4	6.2	2.2
	B3I	12.5	6.6	6.8	1.4	7.8	6.3	5.9	5.8
	B1C	6.2	4.8	5.7	4.5	6.2	7.1	7.3	4.3
	B2a	13.4	8.3	9.1	4.4	8.4	7.8	7.1	3.6
BJ01-BJ02	B1I	4.3	5.4	6.2	4.1	10.1	6.2	13.2	5.8
	B3I	9.8	6.8	9.3	6.3	9.5	5.9	7.4	4.3
	B1C	7.8	5.7	6.7	3.9	11	7.3	6.2	5.0
	B2a	11.2	9.1	11.2	6.8	7.8	7.1	8.2	4.4

综上，基于指数函数的随机模型在 ω 检验中表现最优，各类观测信息误警率均为最低，在质量控制过程中可较准确地定位粗差位置，提高定位可靠性。

4.4 PPP 定位性能检验

利用 BDS-3 四频非组合 PPP 定位模型对 4 种随机模型进行静态定位性能检验，取三维定位偏差均收敛至 10 cm 内的时间为收敛时间，收敛后定位误差均值为定位精度，结果见图 7 和表 5。

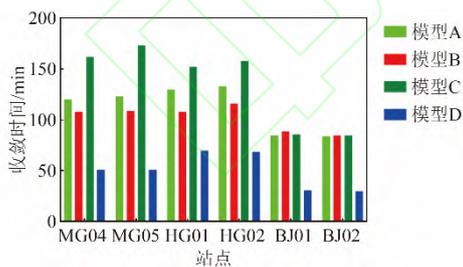


图7 4种随机模型PPP收敛时间

Fig.7 Convergence Time of PPP for Four Stochastic Models

表5 4种随机模型PPP定位精度

Tab. 5 Positioning accuracy of PPP for Four Stochastic Models

模型	定位精度/cm			
	模型 A	模型 B	模型 C	模型 D
MG04	7.37	6.58	6.98	6.35

MG05	5.55	4.62	5.11	4.30
HG01	5.25	5.80	6.21	4.91
HG02	4.50	4.49	6.94	4.41
BJ01	4.67	6.80	8.01	4.69
BJ02	5.31	9.22	9.38	5.34

由图 7 和表 5 可知，随机模型对 PPP 的收敛时间影响较大，收敛时间由大到小依次为：模型 C、模型 A、模型 B、模型 D，相同站点不同随机模型会导致收敛时间差异最大可达 110 min；随机模型对定位结果有一定的影响，定位偏差由大到小依次为：模型 C、模型 B、模型 A、模型 D。

5 结 语

本文利用北斗三号卫星四频观测数据，对 BDS 观测值随机模型进行统计特性分析。首先，基于单历元单差定位模型估计观测值精度，分析了观测值精度和高度角的关系，并进行高度角随机模型建模，评估了 4 种经典随机模型描述北斗卫星观测信息精度的性能；然后，利用相同站点不同时间的观测数据，进行全局检验和 ω 检验，评价随机模型的统计特性；最后，历元四频非组合 PPP 对各模型对收敛时间和定位精度进行检验。本文主要结论如下：

1) 北斗三号卫星各类观测信息精度均与高度角相关, 不同频点相同观测值相关程度不同, 相同频点不同观测类型相关程度不同, 在精密数据处理时, 应对不同频点、不同观测信息进行随机模型建模。

2) 在利用高度角相关的随机模型时, 建议使用指数函数模型。基于指数函数的高度角观测信息随机模型在模型拟合误差、全局检验、 ω 检验以及 PPP 定位测试中均表现出最优的精度处理性能。

3) 不同的随机模型对 PPP 收敛时间和定位精度影响较大, 当观测信息随机模型对观测精度处理较乐观时, 导致检验量偏大, 造成较高的误警率; 而对观测精度处理较保守时, 则致检验量偏小, 导致较高的漏检率, 准确的随机模型能够提滤波器估值精度, 提升质量控制的准确度, 因此, 能够有效缩短 PPP 收敛时间, 提高定位精度。

参 考 文 献

- [1] Li B F, Shen Y Z, Xu P L. Assessment of Stochastic Models for GPS Measurements with Different Types of Receivers[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(20): 3219-3225
- [2] Teunissen P J G, Amiri-Simkooei A R. Least-Squares Variance Component Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(2): 65-82
- [3] Amiri-Simkooei A R, Jazaeri S, Zangeneh-Nejad F, et al. Role of Stochastic Model on GPS Integer Ambiguity Resolution Success Rate[J]. *GPS Solutions*, 2016, 20(1): 51-61
- [4] Qin Xianping, Yang Yuanxi. Influence of Stochastic Model on the Coordinate of Xi'an Mobile SLR Station Determination[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(12): 1765-1770 (秦显平, 杨元喜. 随机模型对解算西安流动 SLR 站坐标的影响[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2019, 44(12): 1765-1770)
- [5] Borko A, Even-Tzur G. Stochastic Model Reliability in GNSS Baseline Solution[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(2): 1-17
- [6] Bian Shaofeng, Wu Zemin. Optimal Tikhonov Regularization Matrix and Its Application in GNSS Ambiguity Resolution[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(3): 334-339 (边少锋, 吴泽民. 最优 Tikhonov 正则化矩阵及其在卫星导航定位模糊度解算中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2019, 44(3): 334-339)
- [7] Liu Yi, Gu Shouzhou, Bian Shaofeng, et al. A New RAIM Algorithm Based on the Density Center of Observed Dataset[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(12): 1900-1906 (刘一, 谷守周, 边少锋, 等. 一种基于观测数据集密度中心的新型 RAIM 算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(12): 1900-1906)
- [8] Wang Xilong, Xu Xiaolong, Zhao Qile. Signal Quality Analysis and Orbit Accuracy Verification of BDS-3 [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20200577 (王西龙, 许小龙, 赵齐乐. 北斗三号系统信号质量分析及轨道精度验证[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20200577)
- [9] Guo Chi, Wang Mengyuan, Gao Kefu, et al. Location-Based Service Technologies for Major Public Health Events: Illustrated by the Cases of COVID-19 Epidemic[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(2): 150-158 (郭迟, 王梦媛, 高柯夫, 等. 面向重大公共卫生事件的位置服务技术: 以 COVID-19 疫情为例[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(2): 150-158)
- [10] Brunner F K, Hartinger H, Troyer L. GPS Signal Diffraction Modelling: The Stochastic SIGMA- δ Model[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(5): 259-267
- [11] Eucler H J, Goad C C. On Optimal Filtering of GPS Dual Frequency Observations without Using Orbit Information[J]. *Bulletin Géodésique*, 1991, 65(2): 130-143
- [12] Liu J N, Ge M R. PANDA Software and Its Preliminary Result of Positioning and Orbit

- Determination[J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2003, 8(2): 603-609
- [13] Erdogan B, Dogan A H. Scaling of the Variance Covariance Matrix Obtained from Bernese Software[J]. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 2019, 54(2): 197-211
- [14] King R, Bock Y. Documentation for the GAMIT GPS analysis software[M]. Mass. Inst. of Technol. Cambridge Mass. 1999.
- [15] Liu Xianglin. Quality Control and Stochastic Model Refinements for Precise GPS Kinematic Positioning[D]. Wuhan: Wuhan University, 2002 (柳响林. 精密 GPS 动态定位的质量控制与随机模型精化[D]. 武汉: 武汉大学, 2002)
- [16] Li B F, Lou L Z, Shen Y Z. GNSS Elevation-Dependent Stochastic Modeling and Its Impacts on the Statistic Testing[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2016, 142(2): 04015012
- [17] Wu Shaoshi, Zhao Xiubin, Pang Chunlei, et al. Stochastic Modeling Strategy for BDS Hybrid Constellation in Relative Positioning[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2019, 41(5): 43-48 (伍劭实, 赵修斌, 庞春雷, 等. 适用于北斗混合星座的相对定位随机模型建模策略[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(5): 43-48)
- [18] Li Yuzhong, Ma Jinquan. Precision Analysis of Static Observation Data of BeiDou Satellite System[J]. *Journal of Geomatics*, 2020, 45(1): 37-39 (李玉忠, 马进全. 北斗卫星系统静态观测数据精度分析[J]. 测绘地理信息, 2020, 45(1): 37-39)
- [19] Lehmann R, Lösler M. Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests Versus Model Selection by Information Criteria[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2016, 142(4): 04016017
- [20] Teunissen P J G, Bakker P F. Single-Receiver Single-Channel Multi-Frequency GNSS Integrity: Outliers, Slips, and Ionospheric Disturbances[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(2): 161-177
- [21] Yang Y, Zeng A, Zhang J. Adaptive Collocation with Application in Height System Transformation[J]. *Journal of Geodesy*, 2009, 83(5): 403-410

Analysis of Statistic Testing of Elevation-Dependent Stochastic Models of BDS-3

Satellite Observation

LIU Yi¹ BIAN Shaofeng^{1*} JI Bing¹ ZHOU Wei¹

¹ Department of Navigation, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China

Abstract: Objectives: The stochastic model of observation information describes the accuracy of observation information and its correlation, and also plays an important role in parameter estimation, quality control and accuracy evaluation. In the process of global navigation satellite system (GNSS) precision positioning, an accurate stochastic model is essential for improving the accuracy of float solution, enhancing the success rate of ambiguity resolution, increasing the accuracy of gross error detection, and obtaining the accurate and reliable positioning results. An optimization method for stochastic model of BeiDou navigation satellite system (BDS) was proposed by handling the properties of four classic elevation-dependent stochastic models based on the relationship between BDS satellite observation information and elevation. Methods: First, the accuracy of BDS four-frequency observation information was evaluated by the simplified Helmert variance estimation method. Then, the model parameters could be fitted based on the estimated precision of observation information. Finally, the statistical characteristics of four stochastic models, including piecewise function, sine function, cosine function and exponential function, were tested by the overall test and ω -test methods. Results: The results show that the

accuracy of pseudorange and carrier phase for BDS-3 satellite are related to elevation, and the correlation degree is different by GNSS observation types. The stochastic model of exponential function shows the best performance on the fitting error, the overall test and the ω -test. The maximum fitting errors of pseudorange and carrier phase are 0.029 m and 5.484 mm, respectively. The false alarm rates of the overall test for the float solution and the fixed solution are 5.1 % and 4.9 %, respectively. In addition, the maximum false alarm rates of the ω -test are 6.8 % for the pseudorange and 4.9 % for the carrier phase. Conclusions: The stochastic model of exponential function can get the shortest convergence time and the highest positioning accuracy for BDS-3 quad-frequency precise point positioning. It can also accurately describe the accuracy of BDS observation information and improve the accuracy and reliability of BDS precise positioning results.

Keywords: BeiDou navigation satellite system (BDS); stochastic model; elevation-dependent; overall test; ω -test

First Author: LIU Yi, PhD candidate, GNSS precise point positioning. E-mail: liuyinue@sina.cn

Corresponding author: BIAN Shaofeng, PhD, Professor, Majors in geodesy. E-mail: sfbian@sina.com

Foundation Support: The National Natural Science Foundation of China(42174051, 41971416, 41874091);

Graduate Innovation Foundation for Naval University of Engineering(DQCXJ2021004, DQCXJ2021005);

Independent Project of Naval University of Engineering (2019055).

标题: 北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型统计特性分析

作者: 刘一, 边少锋, 纪兵, 周威

DOI: 10.13203/j.whugis20220021

收稿日期: 2022-04-02

引用格式:

刘一, 边少锋, 纪兵, 等. 北斗三号卫星观测信息高度角相关随机模型统计特性分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220021 (LIU Yi, BIAN Shaofeng, JI Bing, et al. Analysis of Statistic Testing of Elevation-Dependent Stochastic Models of BDS-3 Satellite Observation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, DOI: 10.13203/j.whugis20220021)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!

您感兴趣的其他相关论文:

北斗全球卫星导航系统试验卫星测距信号质量分析

许扬胤, 杨元喜, 何海波, 李金龙, 唐斌, 章林锋

武汉大学学报·信息科学, 2020, 45(1): 141-149.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20160219>