

利用能量守恒法和 GOCE 卫星轨道 数据反演地球重力场模型

苏 勇¹ 范东明¹ 谷延超¹

1 西南交通大学地球科学与环境工程学院,四川 成都,611756

摘 要:利用傅立叶级数拟合 GOCE 卫星的耗散能,解决了基于能量守恒法恢复 GOCE 重力场模型时耗散能的计算问题。采用 Helmert-Wolf 参数估计法统一求解位系数、能量常数和耗散能的傅立叶级数拟合参数,并采用消局部参数的最小二乘法求解位系数。该方法不需要任何初始值或参考模型,不需要采用差分方法处理能量常数,也不需要迭代计算。利用 GOCE 卫星 2009-11-01~2010-02-12 共 103 d 的精密轨道数据反演了三组 100 阶次的重力场模型 GOCE-ECP01S、GOCE-ECP02S 和 GOCE-ECP03S,并与 EIGEN-5C、EIGEN-CHAMP05S 和 GOCO03S 模型进行比较。结果表明,采用一阶傅立叶级数拟合 GOCE 卫星的耗散能效果最好,反演的 GOCE-ECP01S 模型精度最高,整体精度优于 EIGEN-CHAMP05S,但较 GOCO03S 模型的精度偏低;在 100 阶次的大地水准面误差为±3.2 cm,但由于极空白的影响,恢复模型的带谐项位系数精度偏低。

关键词:能量守恒法;GOCE 卫星;地球重力场模型;耗散能;位系数;傅立叶级数

中图法分类号:P223.0

文献标志码:A

GOCE 卫星采用卫星高低跟踪和重力梯度测量相结合的模式,可以有效利用两种不同模式的测量数据对不同频段重力场信号的敏感,高精度反演地球重力场模型。利用低轨卫星跟踪数据反演地球重力场模型的方法有很多钟,归纳起来主要有 Kaula 线性摄动法、动力学积分法、短弧长积分法、点加速度法、平均加速度法、能量守恒法和天体力学法等^[1-2]。能量守恒法是将卫星的状态矢量与受力情况同引力位系数联系起来,建立能量守恒方程来恢复位系数^[3]。能量守恒法不需要数值积分计算,观测方程是线性的,不需要进行迭代计算,也不需要估计初始状态向量,已成功应用于 CHAMP 和 GRACE 卫星重力场模型的解算^[1-6]。

本文利用 103 d 的 GOCE 卫星精密轨道数据,根据能量守恒法恢复了三组 100 阶次的地球重力场模型 GOCE-ECP01S、GOCE-ECP02S 和 GOCE-ECP03S,并通过与其他重力场模型进行对比,对恢复的重力场模型精度进行评价。

1 能量守恒方程

GOCE 卫星在地固系下的能量守恒方程可以表示为^[6]:

$$T + E_0 = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 (r_x^2 + r_y^2) - V_t - U_0 - \Delta C \quad (1)$$

在惯性系下的能量守恒方程可以表示为:

$$T + E_0 = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \bar{\omega} (r_x \dot{r}_y - r_y \dot{r}_x) - V_t - U_0 - \Delta C \quad (2)$$

式中, T 为扰动位; E_0 为能量积分常数; V_t 为卫星受到的摄动位(主要包括三体引力摄动位、固体潮摄动位、海潮摄动位、固体极潮摄动位和海极潮摄动位); U_0 为正常重力位(本文只指卫星受到的中心引力位); ΔC 为卫星受到的耗散能; $\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]$ 和 $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}_x \ \dot{r}_y \ \dot{r}_z]$ 分别表示卫星在某一时刻的位置和速度向量; $\bar{\omega}$ 表示地球平均自转角速度。式(1)和(2)右端的第一项和第二项分别表示卫星的动能和旋转位能。扰动位的计算公式采

收稿日期:2013-04-11

项目来源:高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(2012018412006);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(SWJTU10ZT02,SWJTU12BR012);西南交通大学博士研究生创新基金资助项目。

第一作者:苏勇,博士生,主要从事卫星重力测量研究。E-mail: suyongme@foxmail.com

用三维直角坐标系下的表达式:

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \bar{V}_{nm} + \bar{S}_{nm} \bar{W}_{nm}) \quad (3)$$

\bar{V}_{nm} 、 \bar{W}_{nm} 为 Cunningham 递推系数, 递推关系见文献[6]。其中, GM 为地球地心引力常数; R 为地球平均半径; n 和 m 分别表示阶和次; \bar{C}_{nm} 、 \bar{S}_{nm} 表示正常化的球谐系数。

2 能量守恒法恢复 GOCE 地球重力场模型

2.1 数据预处理

GOCE 卫星数据由欧洲空间局(ESA)统一管理和释放, 采用 XML 格式存储。因此, 首先需要将 XML 格式的数据提取为所需格式, 同时需要对可能存在的断点进行探测、标记和插补处理。本文所需的是二级轨道数据 SST_PSO_2, 其中包含几何学轨道数据 SST_PK、约化动力学轨道数据 SST_PRD、坐标转换四元素数据 SST_PRM 以及方差-协方差矩阵数据 SST_PCV。由于约化动力学轨道数据包含先验重力场模型的信息, 本文采用几何学轨道数据。

2.2 耗散能的计算

由于 GOCE 采用无阻力推进补偿非保守力的飞行模式, 并且由于各种因素的影响, 无法完全补偿卫星受到的非保守力摄动, 还存在微小的残差。残差加速度可以采用 GOCE 卫星梯度仪获取的共模加速度获取, 但共模加速度含有大量的有色噪声, 需要对其进行滤波和校正处理, 并且经过补偿后残差加速度本身就已经较小, 因此不需要像 CHAMP 和 GRACE 卫星那样直接对非保守力积分计算耗散能。

为了分析 GOCE 卫星所受的耗散能, 利用 2009-11-01 1 d 的轨道数据, 以 EIGEN-5C 为参考重力场模型模拟卫星受到的非球形引力摄动位, 图 1 反映了卫星在地固系和惯性系中的能量常数和耗散能之和的变化。

一种解决 GOCE 卫星耗散能的方法是利用参考重力场模型计算出每个历元卫星的能量常数和耗散能之和, 然后采用历元间差分的方式求得相邻历元间耗散能之差。由于耗散能相对于卫星受到的其他位能来说是一个微小量, 可以通过函数拟合的方法计算耗散能。本文采用傅立叶级数来逼近卫星的耗散能, 同时考虑到能量常数的求解, 将式(1)、(2)中的 E_0 和 ΔC 可以统一表示成:

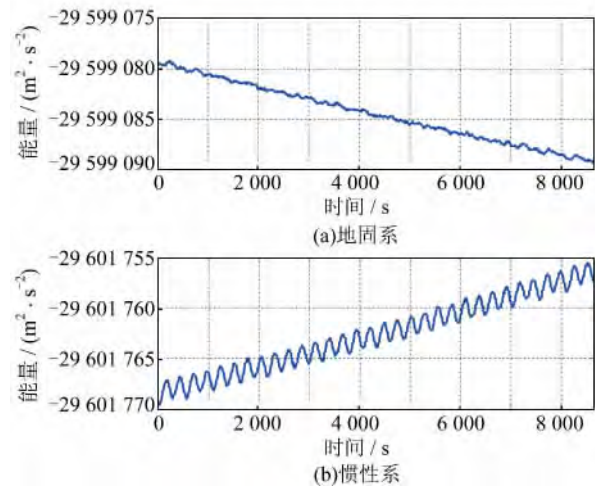


图 1 GOCE 卫星 1 d 的能量常数和耗散能之和
Fig. 1 Sum of Constant and Dissipative Energy of GOCE Satellite One Day

$$E_0 + \Delta C = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_c} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_c} \right) \quad (4)$$

其中, n 为傅立叶级数的阶; T_c 表示 GOCE 卫星绕地球旋转运动的周期, 取值约为 5 400 s; a_0 表示能量偏差常数; (a_n, b_n) 表示能量振幅。

2.3 重力场模型求解

将式(3)、(4)代入式(1)或(2)即可得到利用能量守恒法求解 GOCE 重力场位系数的观测方程。然后, 采用 Helmert-Wolf 参数估计方法列误差方程, 并采用直接求逆法调用 MKL 数学函数库求解位系数:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{L} \quad (5)$$

其中, \mathbf{V} 为观测值改正向量; \mathbf{X} 为位系数向量, 称为全局参数, 根据文献[2, 6]的建议, 位系数采用以次数为主的顺序排列, 法方程矩阵呈现块对角占优的性质, 这样对法方程的解算非常有利; \mathbf{Y} 为能量偏差常数和振幅向量, 称为局部参数; \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为两类未知数的系数矩阵; \mathbf{L} 为常数阵。根据式(5), 按最小二乘原理建立法方程^[7], 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

本文数据为 ESA 提供的 2009-11-01~2010-02-12 共 103 d 的几何学轨道数据, 采样间隔 1 s, 共有 8 899 200 个历元。采用不同重力场模型位系数差的大地水准面误差和大地水准面累计误差评定本文解算出的重力场模型精度。

理论上来说, 按式(4)逼近能量常数和耗散能时, 傅立叶级数的阶数越高, 逼近的效果越好。但由于阶数的增加, 傅立叶级数的系数相关性增强,

在统一求解全局系数和局部系数时,反而会降低全局系数的精度,也会造成局部系数的“失真”。本文取傅立叶级数的最大阶数分别为 $n=1, 2, 3$ (对应的局部参数个数分别为 3、5、7), 恢复了三组 100 阶次的地球重力场模型 GOCE-ECP01S、GOCE-ECP02S 和 GOCE-ECP03S。选择 EIG-EN-5C 作为参考重力场模型, 分别计算三组模型相对于参考模型的大地水准面误差(见图 2)和大地水准面累计误差(见图 3)。可以看出, 随着傅立叶级数阶数的增高, 恢复的地球重力场模型的精度并没有得到提高, 低阶位系数的精度反而出现了不同程度的下降; 采用一阶傅立叶级数的效果最好, 恢复得到的重力场模型 GOCE-ECP01S 在 100 阶次时的大地水准面误差为 ± 3.2 cm, 但恢复模型的二阶项精度较低。将 GOCE-ECP01S 模型与 EIGEN-5C 模型位系数求差, 并对差值的绝对值取对数(见图 4), 可以看出带谐项的位系数的误差较大, 这是由于 GOCE 卫星轨道在南北两极球冠半径约 6.7° 的范围内是空白的, 即存在所谓的极空白现象。由图 2 和图 3 可以看出, GOCE-ECP01S 模型相对于 GOCE-ECP03S 来说精度偏差, 主要原因是本文仅采用 GOCE 卫星轨道数据, 并且数据量较少; 而 GOCE-ECP03S 是综合利用 GRACE 和 GOCE 卫星数据解算得到的, 数据量较大并且受极空白的影响较弱。但即使仅采用轨道数据并且还极空白问题的影响时, 本文恢复的 GOCE-ECP01S 模型精度在 70 阶以后优于 EIGEN-CHAMP05S 模型, 主要是由于 GOCE 卫星的轨道精度比 CHAMP 卫星更高, 同时, GOCE 卫星的轨道高度也更低, 可以恢复更高阶次的重力场模型。

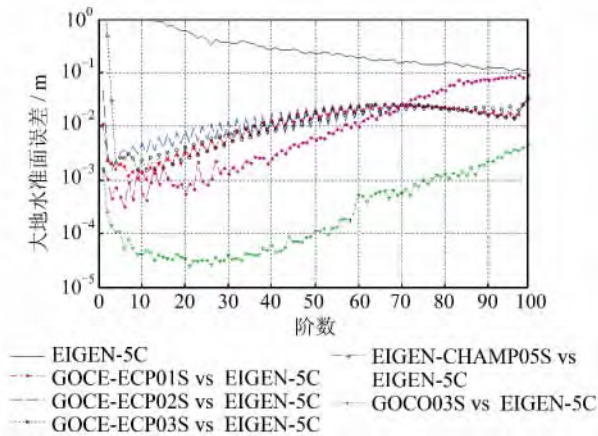


图 2 三组模型大地水准面误差比较(以 10 为底的对数表示)

Fig. 2 Comparison of Geoid Errors Among Three Models (Values of Geoid Errors are Denoted by Denary Logarithm)

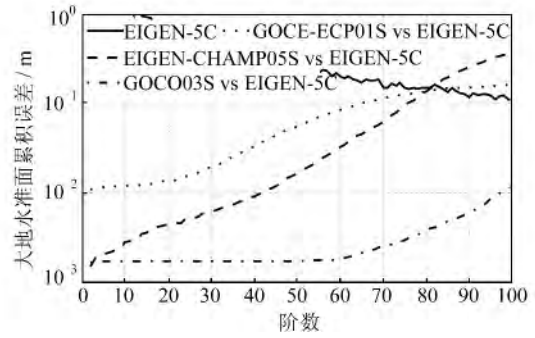


图 3 各组重力场模型的大地水准面累积误差(以 10 为底的对数表示)

Fig. 3 Cumulative Geoid Errors Among Three Models (Values of Geoid Errors are Denoted by Denary Logarithm)

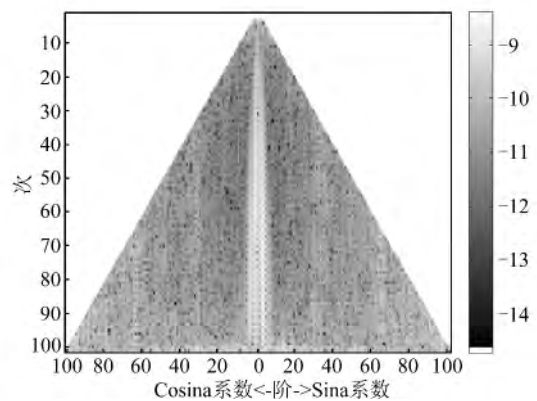


图 4 GOCE-ECP01S 模型与 EIGEN-5C 模型位系数差值(以 10 为底的对数表示)

Fig. 4 Coefficient Differences Between GOCE-ECP01S Model and EIGEN-5C Model (Values of Differences are Denoted by Denary Logarithm)

3 结 语

1) 采用傅立叶级数拟合耗散能可以解决利用能量守恒法恢复 GOCE 重力场模型时耗散能的计算问题, 并且采用一阶傅立叶级数拟合 GOCE 卫星的耗散能效果最好。

2) 除了低阶位系数以外, 利用 GOCE 卫星轨道数据恢复的重力场模型的精度较 CHAMP 卫星恢复的重力场模型精度有了很大提高, 这是由于 GOCE 卫星的轨道高度更低、轨道精度更高。

3) 由于 GOCE 卫星在两极附近会出现数据空白现象(即极空白问题), 因此, 利用 GOCE 卫星数据恢复的重力场模型的带谐项位系数的精度偏差。如何考虑极空白对位系数精度的影响是恢复高精度 GOCE 重力场模型的一个重要课题, 进一步的研究将引入正则化算法, 以提高带谐项位

系数的解算精度。

致谢:感谢 ESA 提供所需 GOCE 卫星的轨道数据。

参 考 文 献

- [1] Xu Tianhe, Yang Yuanxi. CHAMP Gravity Field Recovery Using Kinematic Orbits [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(2): 288-293(徐天河,杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. 地球物理学报, 2005, 48(2): 288-293)
- [2] You Wei, Fan Dongming, Guo Jiang. Gravity Field Recovery by Using Energy Conservation Approach [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2010, 30(1): 51-55(游为,范东明,郭江. 基于能量守恒方法恢复地球重力场模型[J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30(1): 51-55)
- [3] Jekeli C. The Determination of Gravitational Potential Differences from Satellite-to-Satellite Tracking [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1999, 75(2): 85-101
- [4] Han S C, Jekeli C, Shum C K. Efficient Gravity Field Recovery Using in Situ Disturbing Potential Observables from CHAMP [J]. *Geophysical Research Letters*, 2002, 29(16): 361-364
- [5] Visser P, Sneeuw N, Gerlach C. Energy Integral Method for Gravity Field Determination from Satellite Orbit Coordinates [J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 77(3): 207-216
- [6] Wang Zhengtao. Theory and Methodology of Earth Gravity Field Recovery by Satellite-to-Satellite Tracking Data [D]. Wuhan: Wuhan University, 2005(王正涛. 卫星跟踪卫星测量确定地球重力场的理论和方法[D]. 武汉:武汉大学, 2005)
- [7] You Wei, Fan Dongming, He Quanbing. Recovering Earth's Gravitational Field Model Using GOCE Satellite Orbits [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3): 294-297(游为,范东明,贺全兵. 利用 GOCE 卫星轨道反演地球重力场模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(3): 294-297)

Gravity Field Modeling Using Energy Conservation Approach and GOCE Orbits

SU Yong¹ FAN Dongming¹ GU Yanchao¹

1 School of Geoscience and Environment Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: The dissipative energy of the GOCE satellite is fitted by a Fourier series, this method can solve the calculation problem for dissipative energy when the GOCE gravity field model is recovered based on an energy conservation approach. The Helmert-Wolf parameter estimation method is adopted to provide an integer estimate for potential coefficients, the energy constant and Fourier series fitting parameters of dissipative energy. The potential coefficients are solved by elimination for the regional parameter by least squares. Three gravity field models, up to the degree and order 100, named GOCE-ECP01S, GOCE-ECP02S and GOCE-ECP03S, are recovered based on the GOCE orbits for 103-days from 2009-11-01 to 2010-02-12. Finally, the models are compared with the existing EIGEN-6C, ITG-CHAMP05S and GOCO03S models. The results show that the GOCE-ECP01S model is the most accurate when GOCE satellite dissipative energy is fitted by an one order Fourier series which is higher than the ITG-CHAMP05S model, but lower than the model GOCO03S. The geoid error in the GOCE-ECP01S model is ± 3.2 cm for the degree and order 100, but the precision of zonal coefficients is low due to the polar gap.

Key words: energy conservation approach; GOCE satellite; gravity field model; dissipative energy; potential coefficient; Fourier series

First author: SU Yong, PhD candidate, specializes in satellite gravity technique. E-mail: suyongme@foxmail.com

Foundation support: The Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China, No. 2012018412006; Fundamental Research Funds for the Central Universities, Nos. SWJTU10ZT02, SWJTU12BR012; the Doctoral Innovation Funds of Southwest Jiaotong University.