第39卷第9期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 39 No. 9
2014年9月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Sept. 2014

DOI:10.13203/j.whugis20130012 文章编号:1671-8860(2014)09-1038-05

# GM(1,1)病态问题求解的调整计量单位法

唐利民[1,2]

1 道路结构与材料交通部重点实验室,湖南 长沙,410004
2 长沙理工大学交通运输工程学院,湖南 长沙,410004

摘 要:分析了GM(1,1)模型中信息矩阵产生病态的原因,提出调整实测数据计量单位来降低信息矩阵的条件数。根据GM(1,1)模型原理,证明了调整实测数据计量单位不会影响模型的相对残差、平均残差及预测精度。数值实验分析结果表明,调整计量单位法是一种简单、易实现且精确解决GM(1,1)模型病态问题的实用方法。

关键词:GM(1,1)模型;病态问题;信息矩阵;计量单位

中图法分类号:P207.1 文献标志码:A

灰色系统模型的病态问题自文献[1]提出灰色系统理论后就一直有学者在分析和讨论[1-7]。文献[2]指出了GM模型的病态问题;文献[3]提出采用主成分估计法来求解GM (1, N)模型的病态矩阵;文献[4]认为只有在原始序列首项不为零、其他各项近似为零的常数序列的情况下灰色模型才会发生病态性问题;文献[5]基于矩阵条件数来解决NGM(1; 1; k)模型的病态性;文献[6]提出通过数乘变换使原始数据都变成小于1的数来解决GM(1,1)模型的病态性问题;文献[7]引入数乘变换分析反向累积法来解决GM(2, 1)的病态性问题。目前有关灰色系统模型病态问题的研究文献中,对于GM(1,1)模型的病态问题讨论比较深入,观点也不尽相同。文献[2]认为所有灰色模型都存在严重的病态性问题,并且这种病态性来源于模型本身,很难克服。文献[4]经过严格数学推导后,认为最常用的灰色模型GM(1,1)一般情况下不会存在病态性问题。

本文从矩阵条件数出发,以GM(1,1)模型为例,分析了GM(1,1)模型产生病态矩阵的原因,提出可以采用调整实测数据计量单位的方法来降低信息矩阵的条件数,并基于GM(1,1)模型计算原理,证明了调整实测数据计量单位不会影响灰参数的求解以及模型的预测精度。

## 1 GM(1,1)模型产生病态矩阵的原因

**定义1**[1] 设$X^{(0)}$为非负光滑序列,$X^{(0)}=(X^{(0)}(1),X^{(0)}(2),\cdots,X^{(0)}(n))$,$X^{(1)}$为$X^{(0)}$的1-AGO序列,$Z^{(1)}$为$X^{(1)}$紧邻均值生成序列,称$X^{(0)}(k)+aZ^{(1)}(k)=b$为灰色微分方程,也称为GM(1,1)模型的定义式。

**定理1**[1] 若$\hat{a}=[a \quad b]^{\mathrm{T}}$为GM(1,1)模型参数,且

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

则灰色微分方程$X^{(0)}(k)+aZ^{(1)}(k)=b$的最小二乘估计参数序列:

$$\hat{a}=[a \quad b]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{2}$$

即$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\hat{a}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$,则系数矩阵(也称信息矩阵)为[1]:

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 & -\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ -\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & n-1\end{bmatrix} \tag{3}$$

文献[4]认为,对于$z^{(1)}(k)>1$的情况,当0

收稿日期:2013-04-09

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41174001);中国博士后科学基金资助项目(2013M531776);湖南省自然科学基金资助项目(14JJ3090);道路结构与材料交通行业重点实验室开放基金资助项目(kfj100209)。

第一作者:唐利民,讲师,博士后,主要从事不适定问题、非线性反演、变形监测等方面的研究。E-mail:tlmttt@163.com

$<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \leqslant n-2$ 时,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数最大取值为 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$,由于灰色系统研究的是小样本,因此,$4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 应为不大的常数,故 GM(1,1)模型此时不存在病态问题[4]。当 $n-2<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \leqslant n-1$ 时,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数取决于$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 接近于 $n-1$ 的程度;当 $[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \to n-1$ 时,信息矩阵出现严重漂移。此时,$\{z^{(1)}(k)\}$近似为常数序列,则 $X^{(1)}=(X^{(1)}(1),X^{(1)}(2),\cdots,X^{(1)}(n))$也近似为常数序列,$X^{(0)}$近似为首项不为零,其他各项全为零的常数序列,对此序列进行预测没有实际意义[4]。

“灰色系统研究的是小样本,因此,$4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$应为不大的常数”。在实际生产生活中,$z^{(1)}(k)$的值随实际生产生活问题的不同而差异很大,如果 $z^{(1)}(k)>10$,那么,$4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 值也较大。

当 $n-2<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \leqslant n-1$ 时,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数取决于$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 接近于 $n-1$ 的程度。接近 $n-1$ 的程度如何判断?在何种程度下对此序列进行预测没有实际意义?这也是值得研究和讨论的。

现以文献[1]的例 6.1 为例,此时,

$$4-2=2<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 = 2.708\,954 \leqslant 4-1=3 \tag{4}$$

根据最小二乘原理计算的 GM(1,1)模型信息矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数为 249 098.48。依照通常病态矩阵条件数大小的判断标准[10]:良态(<10)、轻度病态(10,100)、较强病态(100,1 000)、严重病态(>1 000),$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是严重病态的。而 2.708 954与 $n-1=3$ 相差 0.291 046,小于 10%,是否可认为例 6.1 在进行预测时没有实际意义?这是需要进一步讨论的,即需讨论在何种接近程度下,对某序列进行预测没有实际意义。

## 2 降低信息矩阵条件数的调整计量单位法

§1 节指出,如果 $z^{(1)}(k)>10$,当 $0<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \leqslant n-2$ 时,那么,$4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 值也较大。实际生产生活中,以通常的计量单位来记录原始数据,一般数值是比较大的。如果调整计量单位,从使原始记录数据数值较小,使得根据 GM(1,1)模型来算得的 $z^{(1)}(k)<10$,从而 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 值也会变小。

当 $n-2<[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 \leqslant n-1$ 时,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数取决于$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ 接近于 $n-1$ 的程度。如果调整计量单位,易知$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$值不会改变,但却可以有效降低信息矩阵的条件数。

文献[1]例 6.1 计量单位为 s,$x=(x(1),x(2),x(3),\cdots,x(8))=(58.9'',59.1'',59.3'',\cdots,59.3'')$。现改为 10 s 为一个计量单位,则 $x=(5.89,5.91,5.93,5.95,\cdots,5.93)$,此时,$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2=2.708\,954$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数为 2 509.456。若再改为 100 s 为一个计量单位,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数为 47.77,按照判断标准,信息矩阵呈轻微病态。据此可认为,计量单位调整后,矩阵的条件数得到极大的改善。

但是,若以 1 000 s 为计量单位,$[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2=2.708\,954$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 条件数为 445.423 46,反而增大。以 10 000 s 为计量单位时条件数高达 42 674.75。究其原因,过大的计量单位使得$\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$很小,与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$的另

一对角元素 $n-1$ 相差过大，也会导致信息矩阵的条件数增大。

从表1可以看出，调整计量单位有个判断标准的问题，即使得信息矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 条件数最小的计量单位是最佳计量单位。

表1 计量单位与信息矩阵条件数

Tab.1 Measurement Unit and Condition Number Information of Matrices

| 计量单位 | $[\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$ | $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 条件数 |
|---|---|---|
| 1 s | 2.708 954 | 249 098.48 |
| 10 s | 2.708 954 | 2 509.46 |
| 100 s | 2.708 954 | 47.77 |
| 1 000 s | 2.708 954 | 445.42 |
| 10 000 s | 2.708 954 | 42 674.75 |

## 3 调整计量单位后灰参数的求解及精度

设 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为实际生产生活中约定的计量单位数值。为方便起见，以10倍原始数据的计量单位作为调整后的计量单位，则 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 变为 $x_{10}^{(0)}=(x^{(0)}(1)/10,x^{(0)}(2)/10,\cdots,x^{(0)}(n)/10)=(x_{10}^{(0)}(1),x_{10}^{(0)}(2),\cdots,x_{10}^{(0)}(n))$。$x_{10}^{(0)}$ 的下标10表示以10倍原始数据计量单位表示的数值。以GM(1,1)模型的AGO模型为例，设 $C$、$D$、$E$、$F$ 为原始数据的二级参数包。则有

$$\begin{cases} x_{10}^{(0)}=\mathrm{AGO}(x_{10}^{(0)}) \\ x_{10}^{(1)}(k)=x_{10}^{(1)}(k-1)+x_{10}^{(1)}(k) \\ \quad =(x^{(1)}(k-1)+x^{(0)}(k))/10 \\ z_{10}^{(0)}=\mathrm{mean}(x_{10}^{(1)}) \\ z_{10}^{(1)}(k)=0.5x_{10}^{(1)}(k)+0.5x_{10}^{(1)}(k-1)= \\ \quad (0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1))/10= \\ \quad z^{(1)}(k)/10 \end{cases} \tag{5}$$

从而，二级参数包为：

$$\begin{cases} C_{10}=\sum_{k=2}^{n} z_{10}^{(1)}(k)=\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k)/10)=\frac{1}{10}\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)=\frac{1}{10}C \\ D_{10}=\sum_{k=2}^{n} x_{10}^{(0)}(k)=\sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)/10)=\frac{1}{10}\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k)=\frac{1}{10}D \\ E_{10}=\sum_{k=2}^{n} z_{10}^{(1)}(k)x_{10}^{(0)}(k)=\sum_{k=2}^{n}((z^{(1)}(k)/10)\times x^{(0)}(k)/10))=\frac{1}{10\times 10}\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k)\times \\ \quad x^{(0)}(k))=\frac{1}{10^2}E \\ F_{10}=\sum_{k=2}^{n} z_{10}^{(1)}(k)^2=\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k)/10)^2=\frac{1}{10^2}\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)^2=\frac{1}{10^2}F \end{cases} \tag{6}$$

发展系数 $a_{10}$ 与灰作用量 $b_{10}$ 为：

$$a_{10}=\frac{C_{10}D_{10}-(n-1)E_{10}}{(n-1)F_{10}-C_{10}^2}= \\ \frac{\frac{1}{10}C\times\frac{1}{10}D-(n-1)\frac{1}{10^2}E}{(n-1)\frac{1}{10^2}F-(\frac{1}{10}C)^2}= \\ \frac{CD-(n-1)F}{(n-1)F-C^2}=a \tag{7}$$

$$b_{10}=\frac{D_{10}F_{10}-C_{10}E_{10}}{(n-1)F_{10}-C_{10}^2}= \\ \frac{\frac{1}{10}D\times\frac{1}{10^2}F-\frac{1}{10}C\times\frac{1}{10^2}E}{(n-1)\times\frac{1}{10^2}F-(\frac{1}{10}C)^2}= \\ \frac{1}{10}\frac{DF-CE}{(n-1)F-C}=\frac{1}{10}b \tag{8}$$

从而，GM(1,1)模型定义型为：

$$x_{10}^{(0)}(k)+a_{10}z_{10}^{(1)}(k)=b_{10}$$

$$\Rightarrow x_{10}^{(0)}(k)+az_{10}^{(1)}(k)=\frac{1}{10}b \tag{9}$$

GM(1,1)白化响应式为：

$$\hat{x}_{10}(k+1)=(x_{10}^{(0)}(1)-b_{10}/a_{10})e^{-a_{10}k}+b_{10}/a_{10} \\ =(\frac{1}{10}x^{(0)}(1)-\frac{1}{10}\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{1}{10}\frac{b}{a}= \\ \frac{1}{10}((x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a}) \tag{10}$$

$$\hat{x}_{10}^{(0)}(k+1)=\hat{x}_{10}^{(1)}(k+1)-\hat{x}_{10}^{(1)}(k) \tag{11}$$

根据上面的公式，可以得出定理2。

**定理2** 对于GM(1,1)灰色预测模型，调整原始实测数据的计量单位不会改变模型的相对残差、平均残差和预测精度。

现证明如下。

由文献[1]可得：

$$\hat{x}(k+1)=(x^{(0)}(1)-b/a)e^{-ak}+b/a$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k) \tag{12}$$

即可得到：

$$\hat{x}_{10}(k+1)=\frac{1}{10}\hat{x}(k+1),\hat{x}_{10}^{(0)}(k)=\frac{1}{10}\hat{x}^{(0)}(k) \tag{13}$$

相对残差为:

$$e_{10}^{(0)}(k)=\frac{x_{10}^{(0)}(k)-\hat{x}_{10}^{(0)}(k)}{x_{10}^{(0)}(k)}100\%=\frac{\frac{1}{10}x^{(0)}(k)-\frac{1}{10}\hat{x}^{(0)}(k)}{\frac{1}{10}x^{(0)}(k)}100\%=e^{(0)}(k) \tag{14}$$

从而,平均残差为:

$$e_{10}^{(0)}(\text{avg})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|e_{10}^{(0)}(k)|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|e^{(0)}(k)|=e^{(0)}(\text{avg}) \tag{15}$$

再次,精度为:

$$p_{10}^{0}=(100-e_{10}^{(0)}(\text{avg}))\%=(100-e^{(0)}(\text{avg}))\%=p^{0} \tag{16}$$

定理 2 得证。

由式(14)～(16)可知,调整实测数据计量单位后,GM(1,1)模型的相对残差、平均残差和预测精度与没有更改计量单位的原始数据相同,即不会改变 GM(1,1)模型的相对残差、平均残差和预测精度。

## 4　数值分析

测定某地区膨胀土加州承载比(CBR)指标,采取等时距(4 h)实测各试件的膨胀变形量,膨胀变形量按规范一般采用百分表或千分表测定,按规范,计量单位取值为 0.01 mm。实测数据见表 2。

表 2　CBR 膨胀变形实测数据[9]

Tab. 2　Measured Swelling Deformation of CBR

| 时间/h | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 变形量/0.01 mm | 0 | 98 | 181 | 249 | 310 | 361 | 402 | 439 |

引入 1 阶加权平均弱化缓冲算子,用前 24 h 实测数据预测 28 h 的膨胀变形,使 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(7))=(0,98,181,249,310,361,402)$ 变为 $X_D=(x(1),x(2),\cdots,x(7))$,此时,$0<[\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)]^2/\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2=4.934\ 430\leqslant 7-2=5$。$B^{\mathrm{T}}B$ 的条件数最大取值为 $4\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2$。此时,信息矩阵 $B^{\mathrm{T}}B$ 的条件数为 11 532 397.47。现以 1 mm 为计量单位,令 $X_{100}=(0,0.98,1.81,2.49,3.10,3.61,4.02)$,得 $B^{\mathrm{T}}B$ 的条件数为 1 162.53。若以 10 mm 为计量单位,则 $B^{\mathrm{T}}B$ 的条件数为 23.50。计量单位调整前后的相对残差均为(0, 0.000 442 591, 0.002 588 542, 0.000 478 62, 0.004 080 76, 0.003 425 006, 0.003 462 393, 0.029 056 83),平均残差和预测精度也一致。

由此可见,计量单位调整后,矩阵的条件数得到极大的改善,依据§3 节所给出的证明和§4 节的算例,计量单位调整后,模型的相对残差、平均残差和预测精度均不会改变。计量单位调整前与调整后的两个预测值,只存在计量单位上的差别,具体预测值见文献[9]。

$B^{\mathrm{T}}B$ 矩阵求逆所得结果的稳定性,极大程度上决定了灰参数求解式(2)的稳定性。本文所提方法在不改变 GM(1,1)模型预测的相对残差、平均残差和预测精度时,有效降低了 $B^{\mathrm{T}}B$ 矩阵的条件数,提高了 $B^{\mathrm{T}}B$ 的逆矩阵的求解稳定性,从而也增强了 GM(1,1)模型参数求解的稳定性。

## 5　结　语

本文分析了 GM(1,1)确定法的病态问题,提出调整计量单位方法来解决信息矩阵的病态问题,得出:① 原始实测数据数值较大,是 GM(1,1)模型信息矩阵产生严重病态的重要原因;② 调整计量单位,选择使得信息矩阵 $B^{\mathrm{T}}B$ 条件数最小的计量单位作为最佳计量单位。③ 调整实测数据计量单位后,不会改变 GM(1,1)模型的相对残差、平均残差和预测精度。

## 参 考 文 献

[1] Deng Julong. Grey Theory Basis[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press,2002(邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002)

[2] Zheng Zhaoning, Wu Yuying, Bao Hanling. The Morbidity Problem in GM Model[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2001, 9(5): 38-44(郑照宁, 武玉英, 包涵龄. GM 模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 38-44)

[3] Wang Zhongwen, Zhang Hongbo, Liu Dianguo. Creating Ill-Conditioned Matrix in GM(1, *N*) and Improve Method by Principal Component[J]. *Journal of Jilin Teachers Institute of Engineering and Technology*, 2005, 21(6): 9-11(王忠文,张洪波,刘

殿国. GM (1, $N$)模型的病态矩阵的产生及主成分估计改进法[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2005,21(6):9-11)

[4] Dang Yaoguo, Wang Zhengxin, Liu Sifeng. Research on Morbidity Problem of Accumulating Method for GM(2,1) Model[J]. *Systems Engineering Theory and Practices*, 2008, (1): 156-160(党耀国, 王正新, 刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2008, (1): 156-160)

[5] Cui Jie, Dang Yaoguo, Liu Sifeng. Study on Morbidity of NGM(1; 1; $k$) Model Based on Conditions of Matrix[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(7): 1 050-1 054(崔杰,党耀国,刘思峰. 基于矩阵条件数的 NGM(1; 1; $k$)模型病态性研究[J]. 控制与决策,2010,25(7):1 050-1 054)

[6] Wu Zhengpeng, Li Bo, Zhang Youping, et al. Study on the Morbidity Problem in Grey Model[J]. *Journal of Communication University of China (Science and Technology)*, 2011, 18(4): 31-34(吴正鹏,李波,张友萍,等. GM(1,1)模型的病态问题研究[J]. 中国传媒大学学报自然科学版,2011,18(4):31-34)

[7] Liu Shengbao, Zhang Gongrang, Mao Xuemin, et al. Research on Reverse Accumulating GM(2,1) Model and Its Morbidity Problem[J]. *Journal of Hefei University of Technology*, 2011, 34(4): 603-608(刘圣保,张公让,毛雪岷,等. 反向累积法 GM(2,1)模型及其病态性研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2011,34(4):603-608)

[8] Tang Limin. Research on the Ill-Posed and Solving Methods of Nonlinear Least Squares Problem[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(4):630(唐利民. 非线性最小二乘问题的不适定性及算法研究[J]. 测绘学报,2012,41(4):630)

[9] Yang Heping, Zhan Wentao, Zhao Wenjian, et al. Rapid Determination Method of CBR Indices for Expansive Soil Filler Based on GM(1,1) Model[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2012, 29(9): 1-7(杨和平,湛文涛,赵文建,等. 基于 GM(1,1)模型的膨胀土填料 CBR 指标快速确定方法[J]. 公路交通科技,2012, 29(9):1-7)

# Adjust Measurement Unit Algorithm for Ill-posed Problem of GM (1,1) Model

*TANG Limin*[1,2]

1 Key Laboratory of Road Structure & Material of Ministry of Communications, Changsha 410004, China

2 School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410004, China

**Abstract**: Ill-posed problems exist in the gray system GM (1,1) model. Seriously ill-posed information matrices will occur in larger original measured data values. Reasons which cause ill-posed information matrices in GM (1,1) modesl are analysized in detail. A method to adjust the measurement unit of the original measured data values to reduce the conditional number of information matrices is put forward. Based on GM (1,1) model theory, we show that an adjustment to the measured data units of measurement does not affect the model relative residuals, average residuals, or prediction accuracy. Numerical experiments and analysis demonstrate that this method of adjusting the measurement unit algorithm for a GM (1,1) model is easy to implement, simple, accurate, and widely applicable.

**Key words**: GM (1,1) model; ill-posed problem; information matrices; measurement unit

**First author**: TANG Limin, lecturer, postdoctoral, specializes in ill-posed problems and nonlinear inversion and deformation monitoring etc. E-mail: tlmttt@163.com

**Foundation support**: The National Natural Science Foundation of China, No. 41174001; China Postdoctoral Science Foundation, No. 2013M531776; Hunan Provincial Natural Science Foundation of China, No. 14JJ3090; Open Fund of Key Laboratory of Road Structure and Material of Ministry of Transport (Changsha University of Science & Technology), No. kfj100209.