第 39 卷 第 7 期 武汉大学学报 · 信息科学版 Vol. 39 No. 7
2014 年 7 月 Geomatics and Information Science of Wuhan University July 2014

DOI:10.13203/j.whugis20130178 文章编号:1671-8860(2014)07-0793-06

多元总体最小二乘在三维坐标转换中的应用

黄令勇[1,2] 吕志平[1] 任雅奇[3] 陈正生[1] 王宇谱[1]

1 信息工程大学地理空间信息学院,河南 郑州,450052
2 海洋测绘研究所,天津,300061
3 63883 部队,河南 洛阳,471000

摘 要:为解决总体最小二乘(TLS)解算三维坐标转换时旋转矩阵线性化导致解算精度降低的问题,提出了能够直接求解旋转矩阵的多元总体最小二乘(MTLS)模型。为了验证多元总体最小二乘坐标转换解算效果,设置了各种坐标转换实验,并与总体最小二乘法进行比较。分析了旋转角度和尺度因子对解算精度的影响,并根据实验结果得出了以下结论:在大角度及独立等权观测条件下,多元总体最小二乘坐标转换解算精度优于总体最小二乘,且算法简单无需迭代,能够实现任意尺度的坐标转换。

关键词:总体最小二乘;多元总体最小二乘;坐标转换;尺度因子

中图法分类号:P207 **文献标志码**:A

坐标转换在参考框架解算、大地基准等领域有着广泛的应用[1]。以往研究多集中于最小二乘法解算坐标转换,但最小二乘的 Gauss-Markov 误差模型在坐标转换建模中存在缺陷,为使坐标转换解算更合理,学者开始研究基于总体最小二乘(TLS)的坐标转换解算。文献[2]研究了总体最小二乘在坐标转换中的应用,但仅考虑了等权观测的情况;文献[3]研究了多元总体最小二乘(MTLS)在二维仿射变换中的应用;文献[4]基于多元总体最小二乘研究了对称三维坐标转换,但仅与最小二乘算法进行了比较。基于同样误差模型的总体最小二乘和多元总体最小二乘算法的比较分析还较少,并且研究旋转角和尺度因子对坐标转换解算影响的文献较少。

针对以上问题,本文基于多元线性回归分析理论,构建了能够直接解算旋转矩阵的多元总体最小二乘模型,推导了尺度因子解算严密公式。通过设置不同的实验方案,比较了总体最小二乘与多元总体最小二乘的坐标转换解算效果,最后给出了相应结论。

1 总体最小二乘通用模型

记$[x',y',z']^{\mathrm{T}}$和$[x,y,z]^{\mathrm{T}}$分别为目标坐标系和被转换坐标系坐标,$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$为坐标平移参数,μ为尺度因子,$\boldsymbol{R}$为旋转矩阵,则三维坐标转换的严密公式为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} + \mu \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1}$$

按照七参数法,在近似值$X_0(\mathrm{d}x_0,\mathrm{d}y_0,\mathrm{d}z_0,u_0,\omega_0,\varphi_0,\kappa_0)$处对式(1) Taylor 展开:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}_0 \tag{2}$$

式中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{1:}\,p_1 & \boldsymbol{N}_{1:}\,p_1 & \boldsymbol{K}_{1:}\,p_1 & R^0_{1:}\,p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{M}_{2:}\,\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{N}_{2:}\,p_1 & \boldsymbol{K}_{2:}\,\boldsymbol{p}_1 & R^0_{2:}\,\boldsymbol{p}_1 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{M}_{3:}\,p_1 & \boldsymbol{N}_{3:}\,p_1 & \boldsymbol{K}_{3:}\,\boldsymbol{p}_1 & R^0_{3:}\,\boldsymbol{p}_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{1:}\,p_n & \boldsymbol{N}_{1:}\,\boldsymbol{p}_n & \boldsymbol{K}_{1:}\,\boldsymbol{p}_n & R^0_{1:}\,\boldsymbol{p}_n \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{M}_{2:}\,\boldsymbol{p}_n & \boldsymbol{N}_{2:}\,\boldsymbol{p}_n & \boldsymbol{K}_{2:}\,\boldsymbol{p}_n & R^0_{2:}\,\boldsymbol{p}_n \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{M}_{3:}\,\boldsymbol{p}_n & \boldsymbol{N}_{3:}\,\boldsymbol{p}_n & \boldsymbol{K}_{3:}\,\boldsymbol{p}_n & R^0_{3:}\,\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Y} = [x' \quad y' \quad z'_1 \quad \cdots \quad x' \quad y' \quad z'_n]^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{X} = [\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y \quad \mathrm{d}z \quad \omega \quad \varphi \quad \kappa \quad \mu]^{\mathrm{T}}$;

$\delta\boldsymbol{X} = [\delta\mathrm{d}x \quad \delta\mathrm{d}y \quad \delta\mathrm{d}z \quad \delta\omega \quad \delta\varphi \quad \delta\kappa \quad \delta\mu]^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{M} = \mu_0 \partial\boldsymbol{R}(\omega,\varphi_0,\kappa_0)/\partial\omega$;$\boldsymbol{N} = \mu_0 \partial\boldsymbol{R}(\omega_0,\varphi,\kappa_0)/\partial\varphi$;

$\boldsymbol{K} = \mu_0 \partial\boldsymbol{R}(\omega_0,\varphi_0,\kappa)/\partial\kappa$;$\boldsymbol{p}_i = [x_i,y_i,z_i]^{\mathrm{T}}$。

其中,$\boldsymbol{G}_{i:}(i=1,2,3;\boldsymbol{G}\in\{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{K}\})$表示矩阵 $\boldsymbol{G}$

收稿日期:2013-05-28
项目来源:国家自然科学基金资助项目(41274015,41274045);国家 863 计划资助项目(2013AA122501)。
第一作者:黄令勇,博士生,主要从事测量数据处理理论与方法研究。E-mail:hlylj87@126.com

第 i 行向量；R^0 为初始旋转矩阵；Y 和 A 分别为观测向量和系数矩阵；δX 为相应参数改正值，$\partial R/\partial\omega$、$\partial R/\partial\varphi$ 和 $\partial R/\partial\kappa$ 分别为旋转矩阵对3个旋转角的偏导数；ω、φ、κ 分别为绕 X、Y、Z 轴的旋转角。

设 e_Y 和 E_A 分别为 Y 和 A 的随机误差向量和误差矩阵，总体最小二乘平差模型为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{e}_Y=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{E}_A\boldsymbol{X}= \\ \quad \boldsymbol{AX}-(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}_{\otimes}\ \boldsymbol{I}_n)\,\boldsymbol{e}_A \\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_Y\\ \mathrm{vec}\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_Y\\ \boldsymbol{e}_A\end{bmatrix}\sim\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\sigma_0^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_Y & 0\\ 0 & \boldsymbol{Q}_A\end{bmatrix}\right)\end{cases} \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{I}_n$ 为 $n\times n$ 的单位阵；$\mathrm{vec}\,\boldsymbol{E}_A$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{E}_A$ 列向量化为 $\boldsymbol{e}_A$；$\otimes$ 表示矩阵之间的直积；σ_0^2 表示单位权方差；Q_Y 和 Q_A 分别表示权逆阵，Q_A 可进一步写成 $Q_A=Q_0\otimes Q_E$。

式(2)中坐标平移参数对应的系数项为常数，故直接对所有系数项建立误差模型是不合理的。若坐标等权独立时，采用重心化法是非常简单有效的，但相关观测或不等权时，重心化法会改变原坐标的权值，因此采用设置权逆阵的方法来确定总体最小二乘误差模型[5]。为保证系数矩阵常数项方差为0，令 $Q_0=\mathrm{diag}\{0,0,0,1,1,1,1\}$。

记 Q_{e_A} 为 e_A 权逆阵，由 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{e}_A$ 得：

$$\boldsymbol{Q}_E=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{Q}_{e_A}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

总体最小二乘目标函数为：

$$\Phi(\boldsymbol{e}_Y,\boldsymbol{e}_A,\boldsymbol{\Lambda},\delta\boldsymbol{X})=\boldsymbol{e}_Y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Y^{-1}\boldsymbol{e}_Y+\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_0^{-1}\otimes \boldsymbol{Q}_E^{-1})\,\boldsymbol{e}_A+2\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{e}_Y-\boldsymbol{AX}+(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}_{\otimes}\ \boldsymbol{I}_n)\,\boldsymbol{e}_A] \tag{5}$$

由极值条件对式(5)整理推导可得：

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{e}}_Y=\boldsymbol{Q}_Y\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\\ \tilde{\boldsymbol{e}}_A=-(\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Q}_E)\hat{\Lambda}\\ \hat{\boldsymbol{\Lambda}}=[\boldsymbol{Q}_Y+(\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\hat{\boldsymbol{X}})]^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\\ \hat{\boldsymbol{X}}=[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}_Y+(\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\hat{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{Q}_E]^{-1}\boldsymbol{A}-\hat{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{Q}_0]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \quad(\boldsymbol{Q}_Y+(\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\hat{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{Q}_E)^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\\ \hat{\boldsymbol{V}}=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_Y+(\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q}_E))^{-1}\cdot\\ \quad\boldsymbol{Q}_E(\boldsymbol{Q}_Y+(\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\hat{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{Q}_E)^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\end{cases} \tag{6}$$

将 Q_Y、Q_0 和 Q_E 代入式(6)进行迭代计算[6]，即可解算，初值可由最小二乘求得。以上即为总体最小二乘坐标转换通用模型。

2 多元总体最小二乘模型

为了避免矩阵线性化引入截断误差，可根据多元线性回归分析原理直接解算正交旋转矩阵，式(1)整理变形为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x'_1 & y'_1 & z'_1\\ \vdots & & \vdots\\ x'_n & y'_n & z'_n\end{bmatrix}}_{Y'_{n\times 3}}=\mu\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ \vdots & & \vdots\\ x_n & y_n & z_n\end{bmatrix}}_{A'_{n\times 3}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}_n\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}_{\mathrm{d}T} \tag{7}$$

正交Procrustes算法是解算正交矩阵的一种数学方法。正交Procrustes算法实质就是求解一个正交旋转矩阵 Ξ，并使 $\mu U\Xi$ 尽可能地接近 $\boldsymbol{V}$，即：

$$\min_{\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}=I}\|\boldsymbol{V}_{n\times d}-\mu\boldsymbol{U}_{n\times d}\boldsymbol{\Xi}_{d\times d}\|_F \tag{8}$$

式中，$\|\cdot\|_F$ 表示Forbneius范数。

比较式(7)和式(8)，要使用正交Procrustes算法来解算旋转矩阵，需消除平移参数。消除平移参数可以采用重心化法，由误差传播定律，为保证重心化前后坐标点权值不变，式(7)中两坐标系公共点权值应具备对称独立等方向性的特点，对称即公共点在两坐标系中的权值相等，等方向性即每个坐标点3个方向坐标权值大小相同，独立即点与点之间，坐标与坐标之间独立。记矩阵公共点权阵为 $W_n=\mathrm{diag}\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，则重心化公式为：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{W}_n[\boldsymbol{I}_n-(1_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_n^2 1_n)^{-1}(1_n 1_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_n^2)] \tag{9}$$

式中，1_n 为 n 维元素为1的列向量。

重心化后，$\bar{\boldsymbol{Y}}'=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}'$，$\bar{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'$，则：

$$\bar{\boldsymbol{Y}}'=\mu\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

由于尺度因子和旋转矩阵独立[4]，可以假定 $\mu=1$，先解算旋转矩阵，此时，有：

$$\bar{\boldsymbol{Y}}'=\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

多元总体最小二乘极值条件为：

$$\min=\|\bar{\boldsymbol{Y}}'-\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\|_F=\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Y}}')-2\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{A}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}') \tag{12}$$

式(12)最小，应有 $\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})=\max$，对 $\bar{\boldsymbol{A}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Y}}$ 进行奇异值分解得到：

$$\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})=\mathrm{trace}(\boldsymbol{RU\Sigma V}^{\mathrm{T}})=\mathrm{trace}(\underbrace{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RU}}_{\Xi}\boldsymbol{\Sigma})=\mathrm{trace}(\boldsymbol{\Xi\Sigma})\leqslant\sum_{i=1}^{3}\sigma_i \tag{13}$$

由于 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为酉矩阵，$\boldsymbol{R}$ 正交，故 Ξ 为正交矩阵，要使上式不等式成立，则有 $\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{I}_{3\times 3}$，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{VU}^{\mathrm{T}}$。

为保证 R 正交特性[4]，需作如下处理：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{VDU}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

式中，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}[1,1,\det(\boldsymbol{VU}^{\mathrm{T}})]$，然后将 R 代入式(10)，则有：

$$\bar{\boldsymbol{Y}}'=\mu\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\mu\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{A}''=\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

分析上式可知，尺度因子的求解就是一个总体最小二乘问题，其目标函数为：

$$\Phi(\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'},\boldsymbol{E}_{A''},\lambda,\mu)=\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}+\boldsymbol{E}_{A''}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}_{A''}+2\lambda^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}-\boldsymbol{A}''\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}_{A''}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) \tag{16}$$

上式对 $\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}$、$\boldsymbol{E}_{\bar{A}''}$、$\lambda$ 和 μ 求导可得：

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{Y}}'-\boldsymbol{W}^{-1}\lambda-\mu\boldsymbol{A}''-\mu^2\boldsymbol{W}^{-1}\lambda=0\\ \boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}=\lambda=\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'')/(1+\mu^2)\\ \boldsymbol{E}_{A''}=\mu\boldsymbol{W}^{-1}\lambda=-\mu(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'')/(1+\mu^2)\end{cases} \tag{17}$$

将 $\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\bar{A}''}$ 代入得：

$$\begin{aligned}\Psi(\mu)=&\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}_{\bar{Y}'}+\boldsymbol{E}_{\bar{A}''}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_{A''}=\\&\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'')(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'')^{\mathrm{T}}/(1+\mu^2)=\\&\boldsymbol{W}(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})(\bar{\boldsymbol{Y}}'-\mu\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}/(1+\mu^2)\end{aligned} \tag{18}$$

由总体最小二乘极值条件 $\Psi(\mu)=\min$,，对 μ 求导，有：

$$\begin{aligned}&\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\mu^2+\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}'-\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Y}}')\mu-\\&\mathrm{trace}(\bar{\boldsymbol{Y}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})=0\end{aligned} \tag{19}$$

解算上式取其合理值得到尺度因子。最后由下式解算坐标平移参数：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}=(1_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_n^2 1_n)^{-1}1_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_n^2[\boldsymbol{Y}'-\mu\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}] \tag{20}$$

多元总体最小二乘方法避免了旋转矩阵线性化且无需初始值和迭代计算，算法简单方便，但受正交 Procrustes 算法制约仅适用于两坐标系观测误差对称独立的情况。而相关多元总体最小二乘的解算目前仍是一数学难题，对其算法的跟踪研究将是今后工作的一个重点。

3　实验分析

将实验限定在观测误差具有对称独立等方向特性的坐标转换解算，以保证两算法计算条件相同。选取 8 个被转换坐标系的坐标（表 1），按照表 2 各方案的转换参数求解目标坐标系下的坐标值，随后对两坐标系的坐标加入误差，称之为观测坐标以模拟实际观测。利用本文总体最小二乘(TLS)和多元总体最小二乘(MTLS)两种算法解算不同方案，再利用所求得的转换参数对 8 个观测坐标进行坐标转换，并计算坐标转换中误差 σ，以评价解算效果。

表 1　被转换坐标系下的公共点坐标

Tab. 1　Coordinate of Common Points in Source Coordinate System

点	X/m	Y/m	Z/m	点	X/m	Y/m	Z/m
1	934.213	2 841.478	−20.200	5	944.245	1 846.201	94.824
2	−582.414	2 475.601	10.524	6	1 478.56	−1 251.425	124.821
3	−1 378.4	−864.59	15.486	7	875.236	426.751	152.681
4	863.781	−1 521.4	162.785	8	−234.56	478.614	84.252

表 2　坐标转换方案

Tab. 2　Coordinate Transformation Schemes

尺度因子	旋转角			
	ω=0.014 56° φ=0.014 2° κ=0.024 5°	ω=8° φ=9° κ=10°	ω=15° φ=18° κ=1.3°	ω=50° φ=70° κ=0.02°
μ=0.89	A-1	A-2	A-3	A-4
μ=1	B-1	B-2	B-3	B-4
μ=1.15	C-1	C-2	C-3	C-4
μ=2.5	D-1	D-2	D-3	D-4
μ=5	E-1	E-2	E-3	E-4
坐标平移量	dx=100 m	dy=184 m	dz=216 m	

3.1　独立等权观测条件下的坐标转换

首先对表 2 各方案得到的坐标加入中误差为 0.01 m 的随机误差，然后分别利用两算法求解坐标转换参数，并进行精度评价。两算法均采用重心化法移除平移参数，此时 $Q_0=\mathrm{diag}\{1,1,1\}$，设 $\|\delta X\|_\infty<0.000\ 1$ 为 TLS 迭代终止条件，为方便比较，将 MTLS 解算的旋转矩阵转换为旋转角，解算结果见表 3。

由表 3 可知，在尺度不变的方案 A、B、C、D、E 中，两算法解算精度均随旋转角增大而降低；在相同旋转角度的方案 1、2、3、4 中，转换精度随尺度因子的增大而降低，由此可知不考虑其他因素，坐标转换精度随旋转角和尺度因子的增大而降低。由表 3 中加粗表示的迭代次数可知，除尺度为 1 的小角度坐标转换方案 B-1 无需迭代外，TLS 算法均需数次迭代；当尺度因子相同时，旋转角越大迭代次数越多，而旋转角度相同尺度不同的坐标转换中，尺度因子变化（尺度因子与 1 之差的绝对值）越大迭代次数越多。但 TLS 无法实现尺度因子为 2.5 和 5 的大尺度坐标转换的正确解算，其原因在于随着尺度的增加，总体最小二乘初始值与真值的偏差越来越大（表 4），受初始值影响收敛结果不正确或不收敛。

而 MTLS 解算无须迭代，算法简单，且大尺度坐标转换中仍然能够正常解算。由表 3 中 TLS 中误差与 MTLS 中误差之差可知，MTLS

精度高于TLS的解算精度，其原因在于MTLS算法直接解算旋转矩阵避免了转换参数线性化引入的截断误差。由此可知，等权独立观测条件下，相比TLS，MTLS算法更简单，精度更高，且能适用于大尺度坐标转换解算。

表3 坐标转换平差结果

Tab. 3 Adjust Results of Coordination Transformation

	方案 *A*-1		方案 *A*-2		方案 *A*-3		方案 *A*-4		方案 *B*-1		方案 *B*-2	
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
d*x*	99.996	99.996	100.003	100.003	100.005	100.007	99.997	99.996	99.996	99.996	100.007	100.008
d*y*	184.009	184.009	183.996	183.997	183.996	183.999	183.990	183.996	184.009	184.009	183.991	183.993
d*z*	216.000	215.999	216.000	215.996	216.009	216.002	216.007	216.007	216.000	215.999	216.005	215.998
μ	0.890 000	0.890 000	0.890 003	0.890 004	0.890 009	0.890 004	0.890 015	0.890 007	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 007
ω	0.014 81	0.014 74	8.000 71	8.000 61	15.000 54	15.000 18	49.999 50	49.999 87	0.015 11	0.015 02	8.000 95	8.000 77
φ	0.014 29	0.014 32	9.002 97	9.003 37	18.002 79	18.003 42	69.999 95	69.999 81	0.014 21	0.014 26	9.003 24	9.003 93
κ	0.024 60	0.024 60	10.000 17	10.000 34	1.300 27	10.000 34	0.019 95	0.020 22	0.024 60	0.024 60	10.000 20	10.000 41
σ	0.009 03	0.008 96	0.015 84	0.014 95	0.022 55	0.019 76	0.025 89	0.024 09	0.009 59	0.009 47	0.018 41	0.015 90
	3	0.000 7	6	0.000 89	6	0.002 79	8	0.001 80	1	0.000 122	3	0.002 51
	方案 *B*-3		方案 *B*-4		方案 *C*-1		方案 *C*-2		方案 *C*-3		方案 *C*-4	
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
d*x*	100.008	100.010	99.993	99.994	99.992	99.992	100.006	100.006	100.002	100.005	99.996	99.995
d*y*	183.990	183.993	183.992	183.999	184.004	184.004	184.000	184.001	183.996	184.000	183.988	183.994
d*z*	216.016	216.007	216.009	216.008	216.001	215.998	216.008	216.002	216.013	216.003	216.010	216.009
μ	1.000 008	1.000 003 4	1.000 013	1.000 002 3	1.150 000	1.150 001	1.150 009	1.150 008 5	1.150 014	1.150 007 7	1.150 016	1.150 006 5
ω	15.000 50	15.000 11	49.999 60	49.999 95	0.014 57	0.014 50	8.001 04	8.000 90	15.000 66	15.000 26	50.000 19	50.000 50
φ	18.002 51	18.003 20	69.999 37	69.999 54	0.013 48	0.013 69	9.003 13	9.003 54	18.002 81	18.003 47	70.000 08	69.999 97
κ	1.299 99	1.300 22	0.020 22	0.020 48	0.024 59	0.024 64	10.000 22	10.000 37	1.300 16	1.300 34	0.020 78	0.020 99
σ	0.023 57	0.019 86	0.021 56	0.018 10	0.014 26	0.013 91	0.019 76	0.018 55	0.025 78	0.021 47	0.028 82	0.026 69
	3	0.003 71	7	0.003 46	7	0.000 35	9	0.001 21	3	0.004 31	7	0.002 13

	方案 *D*-1	方案 *D*-2	方案 *D*-3	方案 *D*-4	方案 *E*-1	方案 *E*-2	方案 *E*-3	方案 *E*-4
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
d*x*	100.001	100.014	100.010	100.005	99.988	100.037	99.966	100.008
d*y*	184.008	184.005	183.990	183.991	184.020	183.984	183.995	183.980
d*z*	215.999	216.013	216.006	216.014	216.001	216.008	216.024	216.026
μ	2.499 999 5	2.500 016 0	2.500 016 3	2.500 017 2	5.000 001 5	5.000 022 8	5.000 005 6	5.000 030 4
ω	0.014 62	8.000 68	15.000 08	50.000 15	0.014 60	8.000 74	100.000 01	50.000 03
φ	0.013 62	9.003 55	18.002 99	69.999 90	0.013 77	9.003 69	0.000 43	69.999 93
κ	0.024 64	10.000 25	1.300 31	0.020 57	0.024 61	10.000 22	0.002 85	0.020 47
σ	0.018 06	0.031 01	0.044 37	0.054 13	0.037 39	0.061 74	0.085 07	0.100 70

表4 TLS平差计算初始值

Tab. 4 Adjust Initialization of TLS

	C-1	*D*-1	*E*-1	*C*-2	*D*-2	*E*-2
$d\omega_0$	0.000 062	0.021 980	0.926 565	−0.008 467	6.351 049	221.814 147
$d\varphi_0$	−0.000 662	0.019 868	0.891 865	0.065 853	47.423 045	54.265 113
$d\kappa_0$	0.000 185	0.037 103	1.574 924	0.021 444	31.073 626	−495.917 327
$d\mu_0$	0.000 000	−0.000 001	−0.000 165	−0.000 006	−0.390 192	−5.067 440
	C-3	*D*-3	*E*-3	*C*-4	*D*-4	*E*-4
$d\omega_0$	0.030 362	36.195 825	20.529 927	2.051 183	574.315 276	273.416 161
$d\varphi_0$	0.052 344	57.936 545	−100.385 415	−0.411 292	32.320 368	130.844 401
$d\kappa_0$	−0.027 151	−9.013 669	−228.846 801	1.471 543	507.865 178	−215.315 181
$d\mu_0$	−1.350 007	−0.377 750	−0.392 461	−3.853 254	−3.817 744	−9.201 074

3.2 独立不等权观测条件下的坐标转换

按照对称独立不等精度的要求对表2中各方案坐标点1、2、3，点4、5，点6、7、8分别加入中误差为0.01 m、0.02 m、0.04 m的随机误差，分别利用两种算法进行坐标转换，并进行精度分析，如表5所示。

由表5可知，在独立不等权坐标转换中，两种算法精度同样随旋转角和尺度因子的增大而降低，TLS迭代次数随尺度因子变化和旋转角度的增大而增多。由MTLS与TLS中误差差值发现，

MTLS 算法精度不再总是优于 TLS 算法。而根据文献[7]分析,多元总体最小二乘算法中的奇异值分解解算精度受分解矩阵扰动量(即观测值误差)影响,当扰动量不同一分布时,其解算精度低。而本实验误差不等权,故 TLS 解算精度因奇异值分解精度降低而降低。但在小旋转角的方案 1 中,MTLS 精度与 TLS 相差不大;在旋转角较大的方案 4 中,TLS 的解算精度反而低于 MTLS,其原因在于随着角度增大,TLS 算法中矩阵线性化引入误差更大。故不等权观测时,除较小旋转角的非线性坐标转换外,MTLS 在算法精度与简便性上优于 TLS 算法,且仍能解算大尺度坐标转换。

表 5　坐标转换平差结果

Tab.5　Adjust Results of Coordination Transformation

	方案 A-1		方案 A-2		方案 A-3		方案 A-4		方案 B-1		方案 B-2	
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
dx	99.994	99.991	99.984	99.980	99.980	99.973	99.969	99.978	99.994	99.991	99.984	99.980
dy	184.004	184.002	184.002	184.003	183.998	184.002	183.986	183.988	184.004	184.002	184.002	184.003
dz	215.995	215.997	215.996	215.996	215.996	215.993	215.986	215.976	215.995	215.997	215.996	215.996
μ	0.999 999	0.999 995	0.999 997	0.999 995	0.889 998	0.889 994	0.889 998	0.889 991	0.999 994	0.999 995	0.999 997	0.999 995
ω	0.014 55	0.014 59	8.000 60	8.000 61	15.00 012	15.000 02	50.002 07	50.001 02	0.014 55	0.014 59	8.000 60	8.000 61
φ	0.014 19	0.014 24	9.004 04	9.004 35	18.003 27	18.003 77	70.001 32	70.000 96	0.014 19	0.014 24	9.004 04	9.004 35
κ	0.024 54	0.024 67	10.000 51	10.000 68	1.300 59	1.300 85	0.022 87	0.021 86	0.024 54	0.024 67	10.000 51	10.000 68
σ	0.027 69	0.028 10	0.032 98	0.035 26	0.034 07	0.038 16	0.039 66	0.038 16	0.027 69	0.028 10	0.032 98	0.035 26
	2	−0.000 41	3	−0.002 28	6	−0.004 09	8	0.001 5	2	−0.000 41	3	−0.002 28

	方案 B-3		方案 B-4		方案 C-1		方案 C-2		方案 C-3		方案 C-4	
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
dx	99.979	99.971	99.967	99.977	99.995	99.991	99.983	99.978	99.977	99.968	99.965	99.975
dy	183.998	184.003	183.984	183.987	184.004	184.002	184.002	184.003	183.997	184.003	183.981	183.985
dz	215.996	215.992	215.985	215.973	215.995	215.997	215.996	215.995	215.996	215.991	215.982	215.970
μ	0.999 999	0.999 994	0.999 998	0.999 991	1.149 994	1.149 995	1.149 997	1.149 996	1.150 000	1.149 994	1.149 998	1.149 990
ω	15.000 13	15.000 03	50.001 95	50.000 91	0.014 29	0.014 33	8.000 62	8.000 63	15.000 14	15.000 03	50.001 80	50.000 79
φ	18.003 25	18.003 75	70.001 25	−70.000 90	0.014 19	0.014 23	9.004 02	9.004 33	18.003 22	18.003 72	70.001 18	70.000 85
κ	1.300 58	1.300 83	0.022 74	0.021 75	0.024 52	0.024 64	10.000 50	10.000 65	1.300 57	1.300 80	0.022 59	0.021 62
σ	0.035 36	0.039 93	0.041 67	0.040 27	0.027 64	0.028 10	0.034 16	0.036 77	0.037 23	0.042 50	0.044 57	0.043 34
	3	−0.004 57	5	0.001 4	3	−0.000 46	7	−0.002 61	7	−0.005 27	9	0.001 23

	方案 D-1	方案 D-2	方案 D-3	方案 D-4	方案 E-1	方案 E-2	方案 E-3	方案 E-4
	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS	TLS	MTLS
dx	99.991	99.963	99.943	99.963	99.991	99.935	99.895	99.940
dy	184.002	184.006	184.004	183.966	184.002	184.010	184.007	183.930
dz	215.997	215.992	215.982	215.938	215.997	215.987	215.964	215.879
μ	2.499 995	2.499 997	2.499 994	2.499 986	4.999 995	4.999 998	4.999 993	4.999 977
ω	0.014 45	8.000 69	15.000 06	50.000 35	0.014 51	8.000 72	15.000 07	50.000 17
φ	0.014 21	9.004 26	18.003 62	70.000 63	0.014 21	9.004 23	18.003 58	70.000 54
κ	0.024 57	10.000 54	1.300 70	0.021 17	0.024 53	10.000 49	1.300 65	0.020 98
σ	0.028 10	0.053 32	0.069 59	0.076 47	0.028 10	0.089 69	0.125 96	0.145 17

4　结　语

相比最小二乘算法,总体最小二乘算法和多元总体最小二乘算法均顾及了坐标转换系数矩阵的随机特性,其平差模型更合理,解算精度均随尺度因子变化和旋转角度的增大而降低。

非线性坐标转换解算中,总体最小二乘算法需迭代计算,迭代次数随旋转角度和尺度因子增大而越多。总体最小二乘算法通过权逆阵设置可以解算相关观测的坐标转换,但易受初始值影响无法实现大尺度坐标转换。

多元总体最小二乘算法能够解算各种大尺度大角度的坐标转换解算且不受初始值影响,无需迭代,算法简单。多元总体最小二乘算法可直接解算旋转矩阵,避免了旋转矩阵线性化引入的误差,在大旋转角坐标转换以及等权独立观测的非线性坐标转换中,解算精度高于总体最小二乘算法;即使观测值误差独立不等权时,多元总体最小二乘算法受矩阵奇异值分解影响,精度有所降低,但也与总体最小二乘算法解算精度相当。故在对称独立等方向性的坐标转换解算中,多元总体最小二乘算法优于总体最小二乘算法。

参 考 文 献

[1] Lv Zhiping, Qiao Shubo. Foundation of Geodesy

[M]. Beijing: Press of Surveying and Mapping, 2011(吕志平,乔书波. 大地测量学基础[M]. 北京: 测绘出版社, 2011)

[2] Yao Yibin, Huang Chengmeng, Li Chengchun, et al. A New Algorithm for Solution of Transformation Parameters of Big Rotation Angle's 3D Coordinate[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3):253-256 (姚宜斌,黄承猛,李程春,等. 一种适用于大角度的三维坐标转换参数求解算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2012,37(3):253-256)

[3] Schaffrinb, Felus Y A. On the Multivariate Total Least-Squares Approach to Empirical Coordinate Transformations: Three Algorithms[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6):373-383

[4] Yaron A F, Robwet C B. On Symmetrical Three-dimensional Datum Conversion[J]. *GPS Solution*, 2009, 13:65-74

[5] Ivan M, Maria L R, Amedeo P, et al. The Element-wise Weighted Total Least-squeares Problem [J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2006, 50:181-209

[6] Shen Y Z,Li B F, Chen Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least Squares Adjustment [J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85:229-238

[7] Qiu Y Y, Wang A D. Solving Balanced Procrustes Problem with Some Constraints by Eigenvalue Decomposition[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, 233: 2 916-2 924

Application of Multivariate Total Least Square in Three-Dimensional Coordinate Transformation

HUANG Lingyong[1,2] *LV Zhiping*[1] *REN Yaqi*[3] *CHEN Zhengsheng*[1] *WANG Yupu*[1]

1 Institute of Geospacial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China

2 Institute of Hydrographic Surveying and Charting, Tianjin 300061, China

3 Troops of 63883, Luoyang 471000, China

Abstract: For avoiding loss of accuracy caused by the linearization of rotation matrix in three-dimensional coordinate transformation by the total least square(TLS) method, the multivariate total least square(MTLS) model is advanced. In order to evaluate the effect of MTLS on coordinate transformation, various experiment schemes set compared with the TLS algorithm. he impacts of rotation angle and scale factor on solution precision are analyzed, and conclusions based on the experimentresults as following: In the condition of coordinate transformation with a bigger rotation angle or under independent equal precision observation, the solution precision of MTLS is better than the one of TLS, especially the MTLS method does not need iterative calculation and can be used for coordinate transformation with any scale factor.

Key words: total least square; multivariate total least square; coordinate transformation; scale factor

First author: HUANG Lingyong, PhD candidate, specializes in the theories and methods of surveying data processing. E-mail: hlylj87@126.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41274015, 41274045; the National High Technology Research and Development Program (863 Program) of China, No. 2013AA122501.