

# 一种改进的 LLL 模糊度降相关算法

谢 恺<sup>1</sup> 柴洪洲<sup>1</sup> 范 龙<sup>2</sup> 潘宗鹏<sup>1</sup>

1 信息工程大学地理空间信息学院,河南 郑州,450000

2 海洋测绘研究所,天津,300061

**摘 要:**针对 GNSS 载波相位精密定位中的整周模糊度解算问题,引入格基规约的思想,基于系统旋转的 Householder 正交变换对现有的 LLL 规约算法进行了改进,并将长度规约的比较范围扩大到  $n$  维,对规约基向量进行预排序,提出了 HE-LLL 规约算法。在不同观测时段长度和不同基线长度的情况下,分别从条件数、规约时间、非正交化指标以及正交化列向量长度变化趋势等方面将 HE-LLL 规约算法与改进前算法的规约效果进行了比较,结果表明,HE-LLL 算法大大提高了规约效率,且对正交化列向量的长度具有很好的约束作用。

**关键词:**整周模糊度;格基规约;LLL 规约;Householder 规约;扩展 H-LLL 规约

**中图分类号:**P228.41 **文献标志码:**A

随着全球导航卫星系统(GNSS)的飞速发展,人们对定位精度及实时性的要求越来越高,如何快速而准确地对相位观测中的整周模糊度值进行解算是问题的关键。在基于模糊度域的整周模糊度解算过程中,由于在观测时间较短的情况下,初始解中的实数模糊度参数精度很低,且模糊度之间的相关性很强,需要首先对模糊度协方差阵做降相关处理,然后对模糊度进行搜索。许多学者针对降相关提出了不同的方法,Teunissen<sup>[1]</sup>提出的 LAMBDA 算法利用高斯变换对模糊度进行降相关变换,Han<sup>[2]</sup>和 Li<sup>[3]</sup>分别提出利用混合上三角和下三角整数 Cholesky 分解法,Xu<sup>[4]</sup>提出了逆整数 Cholesky 分解法。上述降相关方法的条件类似,均基于  $LDL^T$  分解,且经过降相关后的协方差矩阵为对角阵或近似对角阵<sup>[5]</sup>。

Hassibi<sup>[6]</sup>最早将格基规约(lattice reduction)的思想引入 GNSS 整周模糊度解算中。格基规约算法起初由 Lagrange<sup>[7]</sup>提出,用于解决格上的著名难题——最近向量问题(CVP)。随后,Gauss<sup>[8]</sup>、Hermite<sup>[9]</sup>等对该问题展开了研究。Korkine 和 Zolotarev<sup>[10]</sup>对 Hermite 提出的规约基进行了改进,提出 KZ 规约基。Minkowski<sup>[11]</sup>提出新的任意维数格基的规约条件,并称之为 Minkowski 规约。然而对于高维格基,采用以上

方法无法在多项式时间内找到对应规约条件的格基。Lenstra<sup>[12]</sup>提出 LLL 规约算法实现了在多项式时间内找到一个  $n$  维格中的短向量,其长度不超过最短向量长度的  $2^{(n-1)/2}$  倍。本文在分析 LLL 规约算法的基础上,利用基于系统旋转的 Householder 变换对该算法进行了改进,并将长度规约的比较范围扩大到  $n$ ,对规约基向量进行了预排序,设计了 HE-LLL 规约算法。

## 1 LLL 规约算法

LLL 规约算法实现了多项式时间内规约的完成,并在 KZ 规约基的基础上对约束条件进行了简化。该算法的提出对于开辟模糊度解算新思路有着重大意义。

### 1.1 LLL 降相关算法

对整周模糊度协方差矩阵  $Q_a$  进行 Cholesky 分解:

$$Q_a = H^T H = G^T O^T O G \quad (1)$$

式中, $G$  为幺模矩阵; $O$  为近似正交化矩阵。

LLL 算法通过 Gram-Schmidt 正交化对  $H$  矩阵的向量进行逐一变换:

$$o_i^k = o_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}^k o_j^k, i \leq n \quad (2)$$

收稿日期:2013-05-24

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41274045)。

第一作者:谢恺,硕士生,主要从事 GNSS 模糊度解算方法研究。E-mail:nicholas4413@163.com

式中,  $o_i^k$  为  $H$  矩阵的列向量;  $g_{ij}^k$  为转换系数;  $n$  为矩阵维数;  $O = [o_1, o_2, \dots, o_n]$ ;  $G_i = G_i^k G_i^{k-1} \dots G_i^1$ 。 $O^T O$  相对于矩阵  $Q_a$  更接近对角矩阵。

## 1.2 LLL 规约

对于基矩阵  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  和其对应的正交矩阵  $O$ , 以及正交变换矩阵  $G = [g_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ , 如满足以下条件:

$$|g_{i,j}| \leq \frac{1}{2}, j > i \quad (3)$$

$$\delta \|o_i\|^2 \leq \|o_{i+1} + g_{i,i+1} o_i\|^2$$

则称  $A$  为 LLL 规约基, 其中参数  $\delta \in (\frac{1}{4}, 1]$  为事先选定的参数。

为了实现 LLL 规约基的要求, 需要构造规约变换矩阵, 对向量进行逐一处理。具体过程如下。

1) 大小规约: 利用基向量  $a_i$  的正交化系数  $g_{j,i} = \langle o_i, o_j \rangle / \langle o_j, o_j \rangle, j = 1, \dots, i-1$ , 可构造如下整数变换矩阵:

$$T_{j,i} = I - [g_{j,i}]_{\text{int}} e_j e_i^T \quad (4)$$

利用该矩阵右乘基矩阵  $A$ , 对基向量进行变换并对正交阵系数矩阵进行更新。

2) 长度规约 (swap 变换): 如果

$$\delta \|\pi_i(a_i)\|^2 > \|\pi_i(a_{i+1})\|^2 \quad (5)$$

则对  $a_i$  与  $a_{i+1}$  的顺序进行调整。其中,  $\pi_i(a_i)$  为  $a_i$  在由前  $i-1$  个基向量构成的子格  $L(a_1, \dots, a_{i-1})$  所张成的正交空间上的投影向量。

## 2 基于 Householder 正交变换的改进 LLL 规约算法

在基于格理论的模糊度解算问题中, 格基规约的中心思想是为了使基向量之间尽可能的相互正交。已知采用 Householder 变换可以将矩阵分解为一个正交矩阵与上三角矩阵的乘积。本文将基于 Householder 变换的改进 LLL 算法进行研究。

### 2.1 Householder 变换

Householder 的变换原理即通过对原矩阵中的各列向量构造正交矩阵, 以实现在向量整体长度不变的情况下使向量中的部分元素变为 0, 最终得到一个上三角矩阵。

对任意  $x \in C^n$ , 存在 Householder 矩阵  $H$ , 使得  $Hx = \alpha z$ , 其中  $|\alpha| = \|x\|_2, z \in C^n$  是单位向量。对于矩阵  $A$ , 其 Householder 变换过程可表示为:

$$H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1 A = R \quad (6)$$

令  $A_0 = A$ , 当  $i > 1$  时, 有:

$$A_i = H_i A_{i-1} \quad (7)$$

式(6)和式(7)中,  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  均为正交矩阵;  $R$  为上三角矩阵;  $A_i$  的第  $i$  个向量的后  $n-i$  个元素均为 0。

令  $Q = (H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1)^{-1}$ , 则式(7)可以改写为:

$$A = QR \quad (8)$$

由此, 矩阵即可分解成一个正交矩阵与上三角矩阵的乘积。

### 2.2 H-LLL 规约算法

由于格基规约的实质是为了实现规约基之间的相互正交, 而 Householder 变换恰好可将矩阵分解为一个正交矩阵  $Q$  和上三角矩阵  $R$  的乘积, 故只需上三角矩阵为对角阵, 即可说明基向量之间相互正交。因此, 基于 Householder 正交变换的格基规约需通过规约变换将上三角阵  $R$  对角线以上的元素减小至接近 0, 使其尽量接近对角阵。本文将该方法命名为 H-LLL 规约算法。

H-LLL 规约对向量  $a_i$  的处理相当于对  $R$  的第  $i$  个向量  $r_i$  进行变换。首先对向量进行大小规约, 消去其对角线以上的元素  $r_{j,i}, j = 1, \dots, i-1$ , 构造如下幺模矩阵:

$$T_{j,i} = I - \begin{bmatrix} r_{j,i} \\ r_{j,j} \end{bmatrix}_{\text{int}} e_j e_i^T \quad (9)$$

将其右乘基矩阵, 即可实现大小规约, 同时对上三角矩阵进行更新  $R = RT_{j,i}$ 。

然后对向量进行长度规约。此时需要基于  $R$  矩阵进行判断,  $R$  的对角线元素为  $r_{i,i}^2 = \|\pi_i(a_i)\|^2 = r_{i,i}^2 + r_{i-1,i}^2$ , 故  $a_{i+1}$  与  $a_i$  之间长度规约的条件可表示为:

$$\delta r_{i,i}^2 \leq r_{i+1,i+1}^2 + r_{i,i+1}^2 \quad (10)$$

若不满足此不等式, 则需进行 Swap 变换。构造等变换矩阵  $U_{i,i+1}$ , 对向量  $a_{i+1}$  与  $a_i$  以及向量  $r_i$  与  $r_{i+1}$  的位置进行交换

$$A = AU_{i,i+1}, R = RU_{i,i+1} \quad (11)$$

然后重新计算出正交阵  $H'_{i-1}$  消去新的向量  $r_i$  的对角线以下的元素:

$$R = H'_i R \quad (12)$$

H-LLL 规约的过程与 LLL 规约类似, 首先对第  $k-1$  向量进行大小规约, 然后进行长度规约的判断, 再对后面向量进行大小规约, 避免了重复的大小规约计算。

## 3 扩展 H-LLL 规约算法

LLL 规约在向量大小规约的基础上, 对

$\pi_i(a_{i+1})$ 和 $\pi_i(a_i)$ 进行比较,通过 Swap 变换实现了长度规约。然而该方法主要是在二维的范围内进行分析。对 LLL 规约的条件进行了扩展,对规约基向量进行了预排序,本文提出了一种新的 E-LLL (Extended-LLL)算法,并基于 Householder 变换设计了 HE-LLL 规约算法。

### 3.1 E-LLL 规约基

由式(3)的条件 2 可知,当  $\delta=1$  时满足

$$\|\pi_i(a_i)\|^2 \leq \|\pi_i(a_{i+1})\|^2 \quad (13)$$

然而可能出现

$$\|\pi_i(a_i)\|^2 > \|\pi_i(a_{i+2})\|^2 \quad (14)$$

考虑到类似式(14)中的情况,本文提出了 E-LLL 规约基,其规约条件如下:对于基矩阵  $A$  和它对应的正交矩阵  $O$  及正交变换矩阵  $G = [g_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ ,若其满足

$$\begin{aligned} |g_{i,j}| &\leq \frac{1}{2}, j > i \\ \|\pi_i(a_i)\|^2 &= \min(\|\pi_i(a_i)\|^2, \\ &\|\pi_i(a_{i+1})\|^2, \dots, \|\pi_i(a_n)\|^2) \end{aligned} \quad (15)$$

则称  $A$  为 E-LLL 规约基。

E-LLL 规约基保证了向量  $a_i$  是 $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$ 这  $n-i+1$  个向量中,在由前  $i-1$  个基向量张成的正交补空间上投影长度最短。

### 3.2 HE-LLL 规约算法

由于 E-LLL 规约是在整个格基中进行比较判断,运算量较大。若能在规约变换之前,就使基向量满足 E-LLL 规约基中长度规约的要求,将明显提高规约变换的效率。故引入矩阵系统变换<sup>[14]</sup>对 Householder 变换进行改进。

1) 在 Householder 变换的循环过程中,设格基  $A$  的前  $i-1$  个向量经过变换后得到的矩阵为  $A_{i-1}$ ,其中  $A_0 = A$ 。则在基向量的系统旋转过程中,利用 Householder 变换消去向量  $a_i = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  的后  $n-i$  个元素,得到的新向量的第  $i$  个元素的平方为:

$$x_i^2 = \sum_{j=i}^n x_j^2 \quad (16)$$

由此可知,矩阵  $A_{i-1}$ 的子矩阵  $A_{i-1}(i:n, i:n)$  列向量长度  $\|A_{i-1}(i:n, j)\|^2$  表示将  $A_{i-1}$  中的向量  $a_j^{i-1}$  作为第  $i$  个向量进行 Householder 变换时所得上三角矩阵对角线上第  $i$  个元素的平方。将其与 Gram-Schmidt 相联系,可得

$$\begin{aligned} \|A_{i-1}(i:n, j)\|^2 &= \\ \|a_j - \sum_{k=1}^{i-1} g_{k,j} o_k\|^2 &= \pi_i(a_j^{i-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $j=i, \dots, n$ 。故首先计算子矩阵  $A_{i-1}(i:n, i:n)$  的每个列向量  $a_{i-1}(i:n, j)$  的长度。筛选出长度最短的向量  $a_{i-1}(i:n, k)$ ,然后构造初等变换矩阵  $U_i$  对矩阵  $A_{i-1}$  中向量  $a_i$  和  $a_k$  的位置进行调换,即

$$A_{i-1} = A_{i-1} U_i \quad (18)$$

这样可以保证在对  $A_{i-1}$  矩阵进行变换后所得的上三角矩阵中对角线上第  $i$  个元素的长度,相对于后  $n-i$  个元素是最小的。

2) 大小规约与长度规约。当  $i > 1$  时,设  $t=i$ ,在  $j$  从  $i-1$  到 1 的循环过程中,首先对向量  $a_t$  与  $a_j$  进行大小规约变换。构造如式(9)中的变换矩阵  $T_{j,t}$ ,通过右乘  $A_{i-1}$  实现大小规约。然后计算  $\|a_t(j:n)\|^2$  并与  $(a_j(j))^2$  进行比较,其中

$$\begin{aligned} \|a_t(j:n)\|^2 &= \|\pi_j(a_t)\|^2 \\ (a_j(j))^2 &= \|\pi_j(a_j)\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

若  $\|\pi_j(a_t)\|^2 < \|\pi_j(a_j)\|^2$ ,则交换  $a_t$  与  $a_j$  的顺序,并令  $t=j$ ,然后从  $j=j-1$  继续进行循环;若  $\|\pi_j(a_t)\|^2 \geq \|\pi_j(a_j)\|^2$ ,则直接令  $j=j-1$  继续循环。循环结束后,令  $i=t$  进行下一步处理。

3) 在步骤 2)的基础上,构造正交变换矩阵消去  $a_i$  的下三角元素。至此完成了向量  $a_j$  的规约变换,然后令  $i=i+1$ ,重复以上步骤,直到  $i > n$  即可获得满足规约条件的格基  $A$ 。

HE-LLL 规约算法基于系统旋转对每个列向量逐一进行排序,并对每个列向量与其之前的所有列向量进行大小和长度规约,最终可得到满足式(15)中要求的规约基。

## 4 算例及分析

为了评价 LLL 规约算法、H-LLL 规约算法及 HE-LLL 规约算法的规约效果,本节从条件数、规约时间和非正交化指标等方面对以上算法进行了比较。

非正交化指标定义为:

$$\xi = \frac{\prod_{i=1}^n \|a_i\|}{|\det(A)|} = \frac{\prod_{i=1}^n \|a_i\|}{\prod_{i=1}^n \|o_i\|} \quad (20)$$

式中,  $\xi \geq 1$ ,仅当格基向量之间完全正交时  $\xi=1$ ;正交情况越差则  $\xi$  越大。

实验中所用计算机配置为: Intel Core(TM)2 处理器, 2.93 Ghz 主频, 2 GB 内存。所涉及美国 CORS 站信息如表 1 所示。

表1 CORS站信息  
Tab.1 CORS Information

测站	$B(^{\circ}'")$	$L(^{\circ}'")$	$H/m$
P602	35 43 44.980	120 13 40.362	648.844
P539	35 42 09.612	120 10 55.330	601.708
MOR5	40 47 22.259	72 44 46.639	-22.72
MOR6	40 47 21.826	72 44 47.868	-22.676
DSTR	29 57 52.396	90 22 56.007	-18.58
LWES	29 54 01.295	90 20 57.834	-15.71
NCBC	35 22 21.563	83 30 23.371	566.148
NCSY	35 20 52.407	83 12 23.389	645.113

4.1 不同观测时段长度下的规约效果

采用美国 CORS 站 P602 和 P539 于 2012-04-24 的观测数据,其基线长度为 5.08 km,采样间隔为 30 s。分别设置观测时段长度为 2 h、6 h、12 h 和 24 h,对几种规约算法的规约效果进行比较,其实验结果如表 2 所示。

表2 不同观测时段长度下几种算法的比较  
Tab.2 Comparison Between Algorithms with Different Time Intervals

观测时段	规约算法	条件数	规约时间/s	非正交化指标
0:00:00 至 2:00:00 (2 h)	Original	33.54		61.71
	LLL	4.03	0.063	3.72
	H-LLL HE-LLL	4.03 3.98	0.031 0.016	3.72 3.62
0:00:00 至 6:00:00 (6 h)	Original	14.12		56.01
	LLL	5.74	0.078	7.35
	H-LLL HE-LLL	5.74 5.57	0.047 0.032	7.35 6.80
0:00:00 至 12:00:00 (12 h)	Original	22.47		879.35
	LLL	8.18	0.359	41.22
	H-LLL HE-LLL	8.18 9.93	0.063 0.031	41.22 31.36
0:00:00 至 24:59:30 (24 h)	Original	26.58		100 287.2
	LLL	10.04	1.907	1 206.95
	H-LLL HE-LLL	10.04 10.10	0.422 0.062	1 206.95 954.72

根据表 2 所示的实验结果可得出以下结论。

1) 在观测时段长度相同的情况下,经过 3 种算法规约后所得协方差阵的条件数和非正交化指标均小于原始模糊度协方差阵,LLL 和 HLLL 算法的规约效果相同。随着时间间隔的变大,3 种算法所得矩阵的条件数和非正交化指标也整体成增加趋势。

2) 在观测时段长度相同的情况下,比较各方法的规约时间,可知 HE-LLL 规约效率最高,H-LLL 次之,LLL 规约效率最低。随着观测时段长度的变大,原始协方差阵维数的增加,正交变换的复杂度增加,导致方差协方差矩阵正交化过

程所需运算次数相应增加,使得 3 种算法所需规约时间差距更加明显。

3) 通过对比可知,随着观测时段长度的增大,HE-LLL 规约所得矩阵的条件数并非始终最小。从格基规约的原理来分析,目的是通过变换使基向量之间实现正交。为达到最优近似效果,在大小规约的基础上进行长度规约,以保证正交化向量长度较短的基向量排在前面,最终目标是使基向量满足  $\|o_1\|^2 \leq \|o_2\|^2 \leq \dots \leq \|o_n\|^2$ 。将 4 种情况下得到的 HE-LLL 规约基与 LLL 规约基对应正交化向量的长度变化进行对比,如图 1 所示。

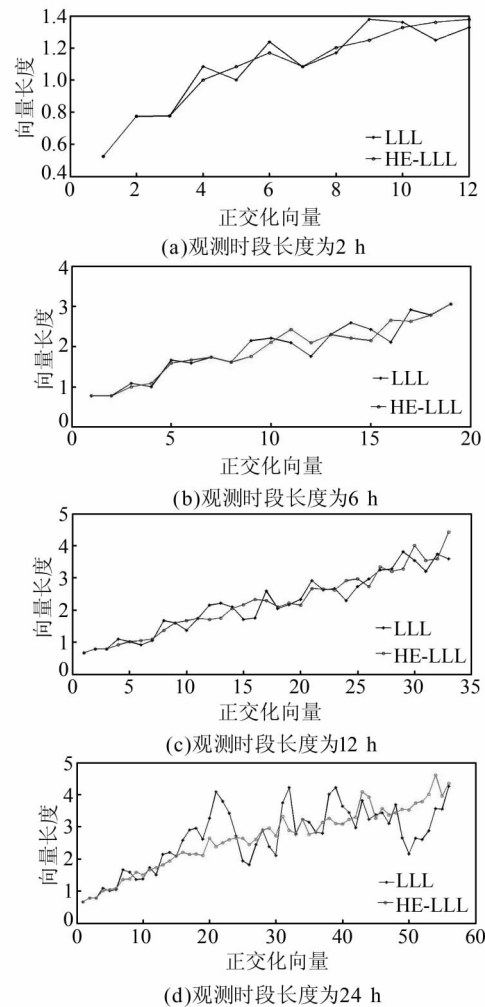


图1 不同观测时段长度下的正交化向量变化趋势  
Fig.1 Trend of the Length of Orthogonal Row Vector with Different Time Interval

图 1 中,星号点表示 LLL 规约后的结果,圆点表示 HE-LLL 规约后的结果。已知长度约束的目标是使列向量能够按照从小到大的顺序排列,所以在将图中的点用线段连接起来时,变化趋势越平缓则其规约效果越好。在索引较小的时

候,HE-LLL 的正交化向量长度小于 LLL 规约基的长度,这样便于向量之间实现更充分的规约变换;随着索引的增大,各点的连线呈现逐渐上升的趋势,其中 HE-LLL 连线变化较为平滑,而 LLL 规约基抖动较大,且观测时段长度越大,这种对比越明显,因而说明 HE-LLL 相较于 LLL 实现了更优的正交化处理。

#### 4.2 不同基线长度下的规约效果

按照基线长度由短到长的顺序,分别采用美国 CORS 站 MOR5 与 MOR6, DSTR 与 LWES, NCBC 与 NCSY 于 2012-04-24 0:00:00~23:59:30''的观测数据,采样间隔为 30s。对各算法的规约效果进行比较,其实验结果如表 3。

表 3 不同基线长度下几种算法的比较  
Tab. 3 Comparison Between Algorithms with Different Baseline Lengths

基线	规约算法	条件数	规约时间/s	非正交化指标
MOR5	Original	64.94		76 902 889.4
-MOR6 (0.03 km)	LLL	20.02	4.797	2 816.57
	H-LLL	20.02	0.828	2 816.57
	HE-LLL	15.51	0.172	1 670.35
DSTR	Original	30.16		211 471.38
-LWES (7.79 km)	LLL	11.24	1.609	503.89
	H-LLL	11.24	0.313	503.89
	HE-LLL	8.54	0.062	154.98
NCBC	Original	40.06		1 517 892.72
-NCSY (27.41 km)	LLL	11.49	1.860	308.84
	H-LLL	11.49	0.406	308.84
	HE-LLL	13.72	0.062	227.77

根据表 3 的实验结果可得出以下结论。

1) 在基线长度相同的情况下,经过 3 种算法规约后所得协方差阵的条件数和非正交化指标均小于原始模糊度协方差阵,且 LLL 和 HLLL 规约后的条件数及非正交化指标相等。

2) 该实验选取了 24 h 的观测数据进行处理,规约算法的耗时相对于数据间隔较小的情况有了明显的增加。在基线长度相同的情况下,HE-LLL 算法的规约时间依然明显小于其他两种方法,证明了 HE-LLL 算法的规约效率优于 LLL 和 H-LLL 算法。

3) 不同基线长度下 LLL 和 HE-LLL 算法正交化向量长度的变化趋势表示如图 2。

从图 2 可以看出,HE-LLL 规约基可以更好地保证正交化向量按照长度由短到长的顺序排列,即图中连线呈现一种平滑上升的趋势;而采用 LLL 算法时,图中的连线抖动较为剧烈,不能较好地实现长度约束的目的。本文进一步验证了

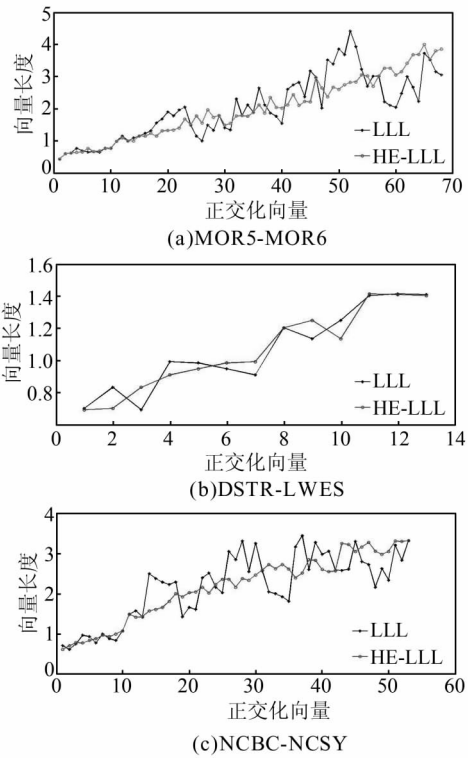


图 2 正交化向量长度的变化趋势

Fig. 2 Trend of the Length of Orthogonal Row Vector

HE-LLL 比 LLL 算法具有更好的规约性能。

## 5 结 语

本文在分析现有 LLL 算法特点的基础上,利用基于系统旋转的 Householder 变换对该算法进行了改进,提出了 H-LLL 规约算法,并扩大了长度规约的比较范围,进一步提出了 HE-LLL 规约算法。为验证改进后算法的规约效果,本文利用美国 CORS 站的 GPS 观测数据,从规约后矩阵的条件数、规约时间以及非正交化指标等方面,对 LLL、H-LLL 和 HE-LLL 规约算法在不同观测时段长度和不同基线长度下的规约效果进行了比较,并对比了 LLL 和 HE-LLL 规约算法所得正交化向量长度的变化趋势。分析实验结果可知,HE-LLL 算法大大提高了规约效率,且对正交化列向量的长度有很好的约束作用,对改善 LLL 算法的规约效果有重要意义。

### 参 考 文 献

[1] Teunissen P J G. The Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 1995, 70(1-2): 65-82

[2] de Jonge P, Tiberius C. The LAMBDA Method for

- Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects[J]. *Publications of the Delft Computing Centre, LGR-Series*, 1996, 12(12): 1-47
- [3] Rizos C, Han S. A New Method for Constructing Multi-satellite Ambiguity Combinations for Improved Ambiguity Resolution[C]. ION GPS 1995, Palm Springs, 1995:1 145-1 153
- [4] Li Z, Gao Y. Direct Construction of High Dimension Ambiguity Transformation for the LAMBDA Method[C]. KIS'97, Banff, 1997
- [5] Xu Peiliang. Random Simulation and GPS Decorrelation [J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75(7): 408-423
- [6] Hassibi A, Boyed S. Integer Parameter Estimation in Linear Models with Applications to GPS [J]. *IEEE Trans Signal Processing*, 1998, 46(11): 2 938-2 952
- [7] Liu Jingnan, Yu Xingwang, Zhang Xiaohong. GNSS Ambiguity Resolution Using the Lattice Theory [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(5): 636-645 (刘经南, 于兴旺, 张小红. 基于格论的 GNSS 模糊度解算, 测绘学报, 2012, 41(5): 636-645)
- [8] Yu Xingwang. Multi-frequency GNSS Precise Positioning Theory Research[D]. Wuhan: Wuhan University, 2011(于兴旺. 多频 GNSS 精密定位理论与方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2011)
- [9] Fan Long. Research on Method of Integer Ambiguity Estimation with Lattice Theory[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2013(范龙. 基于格论的 GNSS 模糊度估计方法研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2013)
- [10] Liu Zhiping, He Xiufeng. An Improved LLL Algorithm for GPS Ambiguity Solution [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2007, 36(3): 286-289(刘志平, 何秀凤. 改进的 GPS 模糊度降相关 LLL 算法 [J]. 测绘学报, 2007, 36(3): 286-289)
- [11] Schnorr C P. Fast LLL-type Lattice Reduction [J]. *Information and Computation*, 2006, 204(1): 1-25
- [12] Xu Peiliang. Parallel Cholesky-based Reduction for the Weighted Integer Least Squares Problem [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(1): 35-52

## An Improved LLL Ambiguity Decorrelation Algorithm

XIE Kai<sup>1</sup> CHAI Hongzhou<sup>1</sup> FAN Long<sup>2</sup> PAN Zongpeng<sup>1</sup>

1 Geospatial Information Institute, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China

2 Naval Institute of Hydrographic Surveying and Charting, Tianjin 300061, China

**Abstract:** A new lattice reduction method is introduced to solve the problem of integer ambiguity resolution in GNSS carrier phase precise positioning. The current LLL reduction algorithm is improved based on a orthogonal Householder transformation with systematic rotation. The comparative range is extended to  $n$ . The reduction base vectors are preordered and a HE-LLL reduction algorithm is proposed. Experiments with different time intervals and baseline lengths were executed and a comparison was made between the HE-LLL algorithm and other algorithm concerning condition number, non-orthogonal index, reduction time, and changing trend of the length of orthogonal row vector. The results show that the HE-LLL algorithm has improved reduction efficiency, and can well restrict the length of orthogonal row vector.

**Key words:** integer ambiguity; lattice reduction; LLL reduction; Householder reduction; extended H-LLL reduction

**First author:** XIE Kai, postgraduate, specializes in GNSS ambiguity resolution. E-mail: nicholas4413@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41274045.