

# 任意球冠下 Stokes-Neumann 混合边值问题的球谐函数有限逼近方法

曾艳艳<sup>1,2</sup> 于锦海<sup>1,2</sup> 万晓云<sup>1,2</sup>

1 中国科学院计算地球动力学重点实验室, 北京, 100049

2 中国科学院大学地球科学学院, 北京, 100049

**摘要:** 首先研究了任意球冠下 Stokes-Neumann 混合边值问题的求解方法, 然后利用 EGM08 重力场模型对建立的求解方法进行模拟计算。结果表明, 给出的解算方法能达到亚 mm 量级的精度。作为 Stokes-Neumann 混合边值问题的应用拓展, 用于精化局部大地水准面, 结果表明, 若不顾及边界效应, 计算精度至少达到 5 cm。因此, 本文建立的 Stokes-Neumann 混合边值问题的解法不仅理论上可行, 而且能保持足够的计算精度, 适用于多种类型重力观测数据的综合处理。

**关键词:** 重力场; 任意球冠; 混合边值问题; 球谐函数

**中图法分类号:** P223.0

**文献标志码:** A

随着现代空间技术的快速发展, 获取的重力场数据越来越多, 不同类型的数据必会产生不同的边值问题。例如, 若陆地部分采用传统的方法可以得到 Stokes 边界条件, 在海洋上使用 GOCE 或 GRACE 模型导出的扰动重力作为边界条件, 则在球近似下可得下列所谓的混合边值问题<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0, \text{ 在 } r = R \text{ 外} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R} T \right|_{S_1} = -\Delta g, \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{S_2} = -\delta g \\ T = O(r^{-1}), \text{ 在无穷远处} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\nabla^2$  是 Laplace 算子;  $T$  是扰动位;  $S_1$  和  $S_2$  分别是对应于地球平均球面  $S = \{r = R\}$  上的陆地和海洋部分;  $\Delta g$  是陆地部分的重力异常;  $\delta g$  是海洋部分的扰动重力;  $R$  是地球平均半径。虽然混和边值问题(1)的提出源自于卫星测高数据的处理, 但随着多种重力观测数据类型的不断出现, 研究类似于混和边值问题(1)的解法必定会有助于综合处理不同类型数据的能力。此外, 将海洋上卫星测高数据与海流数据等组合后可得海洋上的大地水准面高, 再与地面观测资料结合, 可得到下列边值问题<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0, \text{ 在 } r = R \text{ 外} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R} T \right|_{S_1} = -\Delta g \\ T|_{S_2} = \gamma N \\ T = O(r^{-1}), \text{ 在无穷远处} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $N$  是通过卫星测高得到的海洋部分的大地水准面高;  $\gamma$  是正常重力值。

事实上, 问题(1)和(2)是处理卫星测高数据时两个常见的混合边值问题。目前主要的解算方法是逆 Stokes 公式和逆 Vening-Meinesz 公式<sup>[1-2]</sup>。但在使用逆 Stokes 公式和逆 Vening-Meinesz 公式时会遇到差分的计算, 这势必会影响计算的精度<sup>[3]</sup>, 若使用最小二乘法直接求解法方程组, 则计算量比较大。于锦海等人<sup>[4-5]</sup>依据变分法提出了针对问题(1)和(2)的极区球冠下的球谐函数有限逼近方法, 本文的主要目的就是要将球谐函数有限逼近方法拓展到  $S_1$  是一般球冠的情况, 并将混合边值问题(1)和(2)的应用范围从处理卫星测高数据延伸至对多种重力数据类型的综合分析上来, 特别是局部重力场与大地水准面的计算。为了表述方便, 下面将混和边值问题(1)和(2)分别称为 S-N 问题和 S-D 问题。

## 1 极区球冠下混合边值问题的变分解

本文主要使用球坐标系  $(r, \theta, \lambda)$  来表示点位坐标, 这里  $r$  是原点距,  $\theta$  是余纬 (即从北极起算的极角),  $\lambda$  是经度。若  $S_1$  是极区球冠, 则  $S_1$  可表示为  $S_1 = \{0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ , 其中  $\theta_1$  也称为  $S_1$  的半角距。下面以 S-N 问题为例来叙述球谐函数有限逼近方法。作对应于 S-N 问题的二次泛函  $I(T)$  为:

$$I(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dV - \frac{1}{R} \int_{S_1} T^2 dS - \int_{S_1} \Delta g \cdot T dS - \int_{S_2} \delta g \cdot T dS \quad (3)$$

由于  $T$  是球面  $\{r=R\}$  外的调和函数, 故  $T$  可展开为下列球谐级数:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n [a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4)$$

这里  $a_{nm}$  和  $b_{nm}$  是  $T$  的球谐系数;  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  是归一化的连带 Legendre 函数。将式(4)代入式(3), 根据二次泛函极小化原理, 对  $T$  的球谐系数  $a_{nm}$  和  $b_{nm}$  进行求导, 得到其满足的线性方程组如下:

$$\begin{cases} (k+1)a_{kl} - 2 \sum_{n=l}^{\infty} D_{nkl}(\theta_1) a_{nl} + G_{kl} = 0 \\ (k+1)b_{kl} - 2 \sum_{n=l}^{\infty} D_{nkl}(\theta_1) b_{nl} + F_{kl} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{cases} G_{kl} = -\frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_1} \Delta g \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \cos l\lambda dS - \frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_2} \delta g \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \cos l\lambda dS \\ F_{kl} = -\frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_1} \Delta g \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin l\lambda dS - \frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_2} \delta g \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin l\lambda dS \end{cases} \quad (6)$$

$$D_{nkl}(\theta_1) = \frac{1}{4} \begin{cases} \int_0^{\theta_1} \bar{P}_{nl}(\cos\theta) \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin\theta d\theta, m \neq 0 \\ 2 \int_0^{\theta_1} \bar{P}_{nl}(\cos\theta) \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin\theta d\theta, m = 0 \end{cases} \quad (7)$$

通过求扰动位球谐系数, 使得二次泛函达到极小的方法被简称为球谐函数有限逼近方法, 其最终结果可归结为线性方程组(5), 从方程组(5)

中解出球谐系数  $a_{kl}$  和  $b_{kl}$ , 并代入式(4)便可得需要解算的扰动位  $T$ 。由于  $S_1$  是极区球冠, 因而方程组(5)中待求的系数  $a_{kl}$  和  $b_{kl}$  关于阶次  $k$  与  $l$  是可分离的, 即当  $l$  固定不变时, 变化的仅为  $k$ , 并且方程组的系数矩阵还是正定对称矩阵, 因此该方程组的结构非常简单, 易于解算。

类似地, 对于 S-D 问题, 可得相应的方程组如下:

$$\begin{cases} (k-1)a_{kl} - \sum_{n=l}^{\infty} (n+k) Q_{nkl}(\theta_1) a_{nl} + G_{kl} = 0 \\ (k-1)b_{kl} - \sum_{n=l}^{\infty} (n+k) Q_{nkl}(\theta_1) b_{nl} + F_{kl} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{cases} G_{kl} = -\frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_1} \Delta g \cdot \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \cos l\lambda dS + \frac{(k+1)R^2}{4\pi GM} \int_{S_2} \frac{\gamma N}{R} \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \cos l\lambda dS \\ F_{kl} = -\frac{R^2}{4\pi GM} \int_{S_1} \Delta g \cdot \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin l\lambda dS + \frac{(k+1)R^2}{4\pi GM} \int_{S_2} \frac{\gamma N}{R} \bar{P}_{kl}(\cos\theta) \sin l\lambda dS \\ Q_{nkl}(\theta_1) = \delta_n^k - D_{nkl}(\theta_1) \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $\delta_n^k$  是 Kronecker 符号。

## 2 任意球冠下混合边值问题的解法

上述所得的方程组(5)与(8)只是针对极区球冠的情况, 所谓极区球冠是指以北极点为中心点的球冠, 显然极区球冠是极端的情况。下面讨论  $S_1$  是任意球冠的情况, 对于任意球冠, 其中心点则可以是地球表面上的任意点。若要解算任意球冠下的 S-N 问题和 S-D 问题, 则需要对原坐标系作旋转变换, 以使得新引入的坐标系的  $z$  轴恰好是过球冠中心点的轴线, 即在新坐标系下, 球冠中心应该指向北极点。

假设用  $O-XYZ$  来表示原地心直角坐标系,  $(\theta_0, \lambda_0)$  是球冠  $S_1$  的中心在  $O-XYZ$  中的指向, 而用  $O-xyz$  来表示旋转后的坐标系, 那么便有下列关系:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_0 \cos\theta_0 & -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 \sin\theta_0 \\ \sin\lambda_0 \cos\theta_0 & \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0 \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11)$$

由于任意球冠  $S_1$  的中心指向不再是北极方向,所以此时混合边值问题(1)和(2)对应的方程组与方程组(5)或(8)有着本质的差异,即此时的方程组不再具有阶次分离的形式,因而对方程组未知数的个数将会大量增加,从而使得解算过程变得极为困难。

本文对于  $S_1$  是任意球冠的具体解法思路是通过坐标变换式(11)将边值问题转换到变换后的坐标系  $Oxyz$  中来解算的。显然在新坐标系  $Oxyz$  下,球冠  $S_1$  的中心是指向北极的,即所谓的极区球冠。注意到在边值问题(1)和(2)中的边界条件是 Dirichlet、Neumann 和 Stokes 边界条件的组合,而这些边界条件只与函数值或半径方向的导数相关,因此这些边界条件在旋转变换(11)下的数学形式是不变的,即对于地球表面的任意点来说,重力异常、扰动重力和扰动位的大小与其所在的坐标系无关。总之,在变换式(11)下对于任意球冠  $S_1$  的问题(1)和(2)也就变成了新坐标系  $Oxyz$  下的极区球冠的情况,因此可在  $Oxyz$  下解出扰动位  $T$  的位系数  $\hat{a}_{nm}$  和  $\hat{b}_{nm}$ 。

在解得  $\hat{a}_{nm}$  和  $\hat{b}_{nm}$  后,有两种途径求出扰动位  $T$  在原坐标系  $OXYZ$  下的球谐系数。第一种方法是利用变换公式(11)求出扰动位  $T$  在坐标系  $OXYZ$  中的球面  $\{r=R\}$  上的值,然后用球谐分析计算出  $T$  在原坐标系  $OXYZ$  下的球谐系数。第二种方法是利用旋转变换下不同坐标系之间球谐系数的关系来计算,具体算法如下<sup>[6]</sup>:

$$\hat{K}_{nk} = \sum_{m=-n}^n E_{mnk}(\alpha, \beta, \gamma) K_{nm} \quad (12)$$

其中,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  是坐标系的欧拉角(在本文中,  $\alpha = \lambda_0, \beta = \theta_0, \gamma = 0$ );

$$E_{mnk}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{j m \alpha} d_{m k}(\beta) e^{j k \gamma} \quad (13)$$

$$d_{m k}(\beta) =$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(n+k)!(n-k)!(n+m)!(n-m)!}}{t!(n+m-t)!(n-k-t)!(k-m+t)!} \cdot (-1)^t c^{2n-p} s^p \quad (14)$$

$$\begin{cases} c = \cos(\beta/2), s = \sin(\beta/2) \\ p = k - m + 2t, t_1 = \max(0, m - k) \\ t_2 = \min(n - k, n + m) \end{cases} \quad (15)$$

$$K_{nm} = \begin{cases} (a_{nm} - j b_{nm})/2, & m > 0 \\ a_{nm}, & m = 0 \\ (a_{nm} + j b_{nm})/2, & m < 0 \end{cases}$$

$$\hat{K}_{nk} = \begin{cases} (\hat{a}_{nk} - j \hat{b}_{nk})/2, & k > 0 \\ \hat{a}_{nk}, & k = 0 \\ (\hat{a}_{nk} + j \hat{b}_{nk})/2, & k < 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $K_{nm}$ 、 $\hat{K}_{nk}$  分别是变换式(11)前后球谐系数

的复数形式。

综合起来,对于  $S_1$  是任意球冠时对应的 S-N 问题和 S-D 问题的解法步骤概括如下:① 通过变换式(11)将坐标系进行转换,使得要解算的边值问题在新坐标系下的边界成为极区球冠;② 使用极区球冠下的解法求得扰动位在新坐标系下的球谐系数,这归结为某种类型的阶次分离的方程组的求解;③ 将解算出的新坐标系下的球谐系数转换为原坐标系下的球谐系数,从而最终完成 S-N 问题或 S-D 问题的求解。

### 3 算 例

综述前面讨论的关于球冠情况下混合边值问题的解法过程,其关键部分是如何计算  $D_{nkl}(\theta_1)$  或  $Q_{nkl}(\theta_1)$ ,即如何计算式(17):

$$H_{nkl}(t) = \int_t^1 \bar{P}_{nl}(x) \bar{P}_{kl}(x) dx \quad (17)$$

其中,  $t = \cos\theta_1$ 。根据 Legendre 函数的性质,  $H_{nkl}(t)$  的递推算法过程如下<sup>[5]</sup>:

当  $n \neq k, l=0$  时,

$$H_{nk0} = \frac{1}{n(n+1) - k(k+1)} \cdot \left[ \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n1} \bar{P}_{k0} - \sqrt{\frac{k(k+1)}{2}} \bar{P}_{n0} \bar{P}_{k1} \right] \sin\theta_1 \quad (18)$$

当  $n=k, l=0$  时,

$$H_{m0} = H_{n-1, n-1, 0} + \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{2n-1}{2n+3}}$$

$$H_{n+1, n-1, 0} - \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-3}} H_{n-2, n, 0} \quad (19)$$

当  $l \neq 0$  时,

$$H_{nkl} = -\sqrt{\frac{\delta_l}{(k+l)(k-l+1)\delta_{l-1}}} \bar{P}_{nl} \bar{P}_{k, l-1} \sin\theta_1 + \frac{\delta_l}{\delta_{l-1}} \sqrt{\frac{(n+l)(n-l+1)}{(k+l)(k-l+1)}} H_{nk, l-1} \quad (20)$$

其中,  $\bar{P}_{kl}(x)$  是归一化的连带 Legendre 函数,并简单地用  $\bar{P}_{kl} = \bar{P}_{kl}(t)$  表示  $\bar{P}_{kl}(x)$  在  $t = \cos\theta_1$  处的值;

$$\delta_l = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 2, & l \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

注意  $H_{nkl}(t)$  关于阶数  $n$  与  $k$  具有对称性,因此当  $l \neq 0$  时,用式(20)计算  $H_{nkl}(t)$  时总是计算  $k \geq n$  的情况,其原因是为了确保式(20)在计算过程不会发生数据溢出的情况。

例 1 计算精度的模拟检验。以 EGM08 模

型的前 180 阶作为检验模型,而正常引力位  $V$  则取为 EGM08 模型中的零阶项、 $J_2$  与  $J_4$  项的和,记任意球冠  $S_1$  的半角距为  $\theta_1$ ,中心点为  $(\theta_0, \lambda_0)$ 。下面的计算以 S-N 问题为主,首先在  $S_1$  上从 EGM08 模型和正常引力位计算出重力异常  $\Delta g_{08}$ ,然后在球面  $\{r=R\}$  上  $S_1$  外的其余部分  $S_2$  计算  $\delta g_{08}$ ,这样就构建了 S-N 问题。利用本文给出的方法从问题(1)中解出扰动位  $T$ ,由此进一步计算出大地水准面高  $N$ 。另一方面,直接从 EGM08 模型可以算出对应的大地水准面高  $N_{08}$  的精确值。令  $\eta = N_{08} - N$ ,则  $\eta$  就反映了问题(1)的计算误差。下面将球冠  $S_1$  的中心选择为拉萨(即  $\theta_0 = 60^\circ, \lambda_0 = 91^\circ$ ),半角距取为  $\theta_1 = 20^\circ$ ,图 1 即是  $\eta$ (cm)的计算结果。之所以选择青藏高原区域作为本文的计算区域,是因为各地区的重力场变化很大,因此其计算结果更具有代表性。

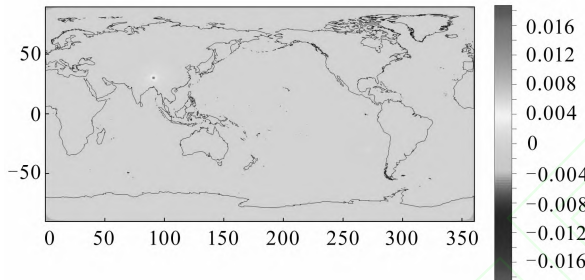


图 1  $\eta$  的分布图

Fig. 1 Distribution of  $\eta$

从图 1 显示的结果可见,使用 S-N 问题恢复的大地水准面精度在全球范围内基本上都达到了 0.02 cm 量级以内,误差较大的部分主要集中在球冠  $S_1$  的中心处,基本上都不超过 mm。这说明了本文建立的关于混和边值问题的解法是可行的,至少完全适用于 cm 级大地水准面的确定。此外,算法在  $S_1$  中心处附近的误差较大,其原因可能在于极点是奇异点的缘故。

例 2 将混合边值问题用于局部重力场计算。记任意球冠  $S_1$  的半角距为  $\theta_1$ ,中心点为  $(\theta_0, \lambda_0)$ ,以 GOCE Time Wise Solution<sup>[7]</sup> 模型(简称为 GOCE 模型)的前 180 阶作为  $S_1$  上的观测模型,EGM08(180 阶)模型作为  $S_2$  上的补值模型,而正常引力位  $V$  仍选取为 EGM08 模型中的零阶项、 $J_2$  与  $J_4$  项的和。首先在  $S_1$  上从 GOCE 模型和正常引力位计算出重力异常  $\Delta g_{goce}$  作为观测值;然后在  $S_2$  上利用补值模型 EGM08 计算  $\beta_{08}$ ,这样就构建了 S-N 问题;最后利用本文方法解出扰动位  $T$ ,进而可以计算出  $S_1$  上的大地水准面高  $N_{S_1}$ 。另外,直接从 GOCE 模型可以计算出  $S_1$  上

对应的大地水准面高  $N_{goce}$  的精确值。令  $\epsilon = N_{goce} - N_{S_1}$ ,则  $\epsilon$  表示了问题(1)在  $S_1$  上使用局部重力异常数据来恢复大地水准面高  $N_{goce}$  的误差。图 2 是将球冠  $S_1$  的中心选择为拉萨(即  $\theta_0 = 60^\circ, \lambda_0 = 91^\circ$ ),半角距取为  $\theta_1 = 20^\circ$  时  $\epsilon$ (m)的结果。此外,为了更好地分析内部计算精度,表 1 列出了半角距为  $\theta_1 = 20^\circ$  球冠  $S_1$  时,取内部球冠  $19^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 5^\circ$  关于  $\epsilon$  的主要统计量。该结果主要表现了球冠  $S_1$  内部的统计结果。

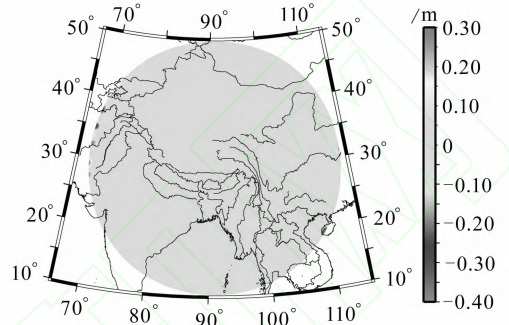


图 2  $\epsilon$  的分布图

Fig. 2 Distribution of  $\epsilon$

表 1  $\epsilon$  的统计结果/m

Tab. 1 Statistical Results of  $\epsilon$ /m

$\theta_1$	max	min	均值	方差
$20^\circ$	0.273 7	-0.383 8	-0.008 2	0.018 5
$19^\circ$	0.055 2	-0.087 7	-0.008 0	0.013 4
$15^\circ$	0.037 2	-0.053 2	-0.007 7	0.011 4
$10^\circ$	0.032 7	-0.046 2	-0.007 6	0.010 7
$5^\circ$	0.028 3	-0.040 8	-0.007 6	0.009 6

从图 2 与表 1 可知,利用  $S_1$  上的局部重力异常资料以及本文恢复重力场的方法能够在整个研究区域  $S_1$  上的精度达到 30 cm,而在研究区域内部(半角距  $19^\circ$  内),其精度可达到 5 cm,并且半角距越小,恢复精度越高。若要具体分析其误差产生的原因,主要体现在两个方面:① 是由边界效应引起的,在  $S_1$  的边界  $\theta_1 = 20^\circ$  附近,既有  $S_1$  上的观测值(GOCE 模型)的影响,同时又受到补值模型 EGM08 的影响。② 与研究区域  $S_1$  的大小有关, $S_1$  越大,观测数据就越多,从而计算的结果也会更好;反之,若  $S_1$  较小,则观测资料就缺乏,此时补值模型的数据将会占优,因而最终将导致计算精度降低。

## 4 结 语

本文详细讨论了一般球冠下混合大地边值问题的具体解法,使用 EGM08 重力场模型对解法进行了模拟计算,结果表明,该方法有足够的精度

保证,理论上能够达到亚 mm 量级的精度。在具体计算过程中,推导了关于  $D_{nkl}(\theta_1)$  或  $Q_{nkl}(\theta_1)$  的算法,给出了具体的计算公式。

将混合边值问题的应用范围从处理卫星测高数据拓展到局部重力场与大地水准面的计算上来,为综合处理多种类型的观测数据提供了另外的途径。本文以青藏高原为研究区域,选择以拉萨为中心、半角距为  $20^\circ$  的球冠,在该球冠上,以 GOCE 重力场模型计算了重力异常,而在其他地区,则使用 EGM08 重力场模型的大地水准面高进行补值,构建了相应的混合边值问题。利用本文方法对这样的混合边值问题进行了解算,结果表明,若不顾及边界效应,则在该球面内部,大地水准面的恢复精度可达到 5 cm 左右。同时分析了误差产生的原因,即误差与解法无关,而与研究区域的大小以及用于补值模型的选择有关。

### 参 考 文 献

- [1] Hwang C. Inverse Vening-Meinesz Formula and Deflection-Geoid Formula: Applications to the Predictions of Gravity and Geoid over the South China Sea[J]. *J Geodesy*, 1998, 72: 304-312
- [2] Mainville A. The Altimetry-Gravimetry Problem Using Orthogonal Base Functions[D]. Ohio: The

- Ohio State University, 1986
- [3] Wan Xiaoyun, Yu Jinhai. Accuracy Analysis of the Remove-Restore Process in Inverse Stokes Formula [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(1): 77-80(万晓云, 于锦海. 移去恢复法在逆 Stokes 公式计算中的精度分析[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2012, 37(1): 77-80)
- [4] Yu Jinhai, Zhang Chuanding. A Solution Method for the Satellite Altimetry Problem with the Spherical Harmonic Series [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48: 561-566(于锦海, 张传定. 卫星测高混合边值问题的球谐级数解法[J]. *地球物理学报*, 2005, 48: 561-566)
- [5] Yu J H, Peng F Q. Variational Solution About Over-determined Geodetic Boundary Value Problem and Its Related Theories [J]. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 2007, 50: 555-562
- [6] Sneeuw N J. Inclination Functions: Group Theoretical Background and a Recursive Algorithm [D]. The Netherlands: Delft University of Technology, 1991
- [7] Pail R, Bruinsma S, Migliaccio F, et al. First GOCE Gravity Field Models Derived by Three Different Approaches [J]. *J Geodesy*, 2011, 85(11): 819-843

## Spherical Harmonic Finite Approximation Method for the Stokes-Neumann Mixed Boundary Value Problem with a Sphere Cap

ZENG Yanyan<sup>1,2</sup> YU Jinhai<sup>1,2</sup> WAN Xiaoyun<sup>1,2</sup>

1 Key Laboratory of Computational Geodynamics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2 College of Earth Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract:** A method solving the Stokes-Neumann Mixed Boundary Value Problem (S-N MBVP) with a sphere cap is studied in this paper. First, we discuss the method for S-N MBVP with the polar cap. Then S-N MBVP with general sphere cap is solved with the help of coordinate transformation. The transformation between spherical coefficients in different coordinate systems is also studied. By making use of the imitation computation for the EGM08 model, it is concluded that the solution method given in the paper can be accurate to submillimeter level. S-N MBVP can be used to refine the local geoid, our results show the recovered height of a geoid in the interior of the spherical cap can reach to the accuracy of 5 centimeters. Our results show that the proposed method not only is effective in theory, but also has sufficient precision to deal with many kinds of gravity data.

**Key words:** gravity field; sphere cap; mixed boundary value problems; spherical harmonics function

**First author:** ZENG Yanyan, PhD candidate, majors in satellite geodesy, satellite orbit determination. E-mail: zengyanyan1989@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41274034, 41074015, 41104047.