

# 球谐函数变换快速计算扰动引力

王建强<sup>1</sup> 李建成<sup>2</sup> 王正涛<sup>2</sup> 赵国强<sup>3</sup>

(1 东华理工大学测绘工程学院,南昌市广兰大道 418 号,330013)

(2 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

(3 中国地震局地震预测研究所 GPS 中心,北京市复兴路 63 号,100036)

**摘要:**在球谐函数变换基础上,利用新极下轨道的特殊性,在新坐标下引入 Clenshaw 求和计算轨道扰动引力。从理论上对比分析了传统方法、球谐函数变换方法和改进方法的计算速度和存储模型需要的物理空间。模拟试验分别采用 3 种方法计算了一段轨道的扰动引力,试验结果表明,改进的球谐函数变换方法比传统球谐函数变换方法计算速度可提高 100 倍,数据存储量仅占传统方法的 3%。

**关键词:**扰动引力;Clenshaw 求和;球谐函数;极点变换

**中图分类号:**P223

在航天器轨道定轨中,需要实现轨道扰动引力快速赋值。然而由于地球重力场是保守力场,惯性导航技术无法测量保守力场,它的摄动因素只能依靠地球重力场模型来消除。适合航天轨道应用的重力场模型不仅要求计算速度快,而且存储的模型所需要的空间也必须足够小。利用球谐函数模型计算扰动引力在航天器轨道运动计算中被广泛采用<sup>[1]</sup>。球谐函数计算简单,比较实用,但是该方法还存在一些需要解决的问题<sup>[2]</sup>:① 球谐函数计算量大,其中最主要的计算是缔合勒让德函数的计算和三角函数序列的计算;② 数据存储量大,球谐函数模型的系数个数同阶次是平方关系,因此,模型的阶次受到限制。为了提高运算速度,减少存储空间,任萱等<sup>[3-6]</sup>将球谐函数进行多项式变换<sup>[7]</sup>,生成新坐标系下的球谐函数模型。球谐函数变换模型要适当选择极点,将模型改变为以地心距、侧向角偏差、射程角为参数的新表达式。变换后方法的计算速度大大提高,而且可以保证足够的精度。本文在球谐函数变换的基础上,利用坐标变换后轨道的纬度不变的特性,引入 Clenshaw 求和<sup>[8-9]</sup>计算方法,不仅可以提高计算速度,还可以减少模型系数,节省存储空间。

## 1 球谐函数变换

当把飞行器和地球的运动简化为二体问题时,轨道在惯性空间中的轨迹是一个椭圆形轨道<sup>[10-12]</sup>。球谐函数变换模型需要建立新的坐标系,新坐标系的极点选取有两种方法:① 将飞行器的动量距与不动地球壳的交点作为新极点<sup>[4-6]</sup>,此时轨道在新坐标系下的赤道上;② 飞行器飞行轨迹在地球外壳的投影带上<sup>[3]</sup>任选一点作为新极点,此时轨道在新坐标系下的子午线上。Clenshaw 求和在计算具有相同纬度上的多项式函数时,计算速度有明显提高,因此,Clenshaw 求和方法适合采用第一种极点选择方法。新极坐标示意图如图 1,图中  $N$  为北轴向, $O$  为球心,轨道上任一点  $Q$  的地心球坐标为  $(\rho, \theta, \lambda)$ , $\rho$  为地心距, $\theta$  为余纬, $\lambda$  为经度,换极新极点  $P_0$  的球面坐标为  $(\theta_0, \lambda_0)$ , $\alpha$  为  $Q$  点相对于新极点  $P_0$  的方位角。新极点下初始子午线为  $NP_0$  的延长线,空间任一点  $Q$  在新球坐标系下的坐标为  $(\rho, \psi, \sigma)$ , $\psi$  为新纬度, $\sigma$  为新经度。

新极坐标系建立后,需要建立原地心坐标和新极坐标系的地心坐标的转换关系。如图 1 所

收稿日期:2013-04-28。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41074014,41161069,41204003);江西省教育厅青年基金资助项目(GJJ12394);东华理工大学博士科研启动基金资助项目(DHBK201113,DHBK201114);武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(11-01-01)。

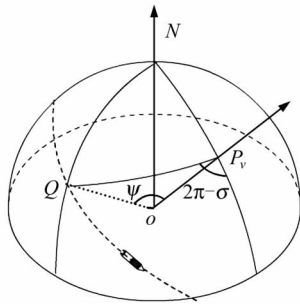


图1 新极坐标示意图

Fig. 1 New Polar Coordinate Schematic

示,根据球面三角公式,任意一点Q在极坐标系下的球面地心坐标为 $(\theta, \lambda)$ ,这里,Q点在新极点 $P_0(\theta_0, \lambda_0)$ 的球面地心坐标计算公式<sup>[13-14]</sup>为:

$$\begin{aligned} \psi &= \arccos[\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\lambda_0 - \lambda)] \\ \alpha &= \arccos\left[\frac{\sin\theta_0 \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \cos(\lambda_0 - \lambda)}{\sin\psi}\right] \end{aligned} \quad (1)$$

当得到 $\alpha$ 角后,可得新坐标系下的经度为:

$$\sigma = \pi - \alpha \quad (2)$$

在原坐标系中的扰动位球谐展开为:

$$\begin{aligned} T &= \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \cdot \\ &\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $C_{nm}$ 和 $S_{nm}$ 是扰动位系数; $P_{nm}(\theta)$ 是缔合勒让德函数<sup>[14-16]</sup>,通常重力场模型给出的位系数都是正常化的,正常化函数式为:

$$\begin{cases} C_{n0} = \sqrt{2n+1} \bar{C}_{n0}, m=0 \\ C_{nm} = \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{C}_{nm}, m>0 \end{cases} \quad (4)$$

球谐函数在新坐标系中展开式为:

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\sigma + B_{nk} \sin k\sigma) P_{nk}(\psi) \quad (5)$$

新旧坐标系下的扰动位系数具有相关性,也和新高极点的坐标有关系。假设 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ ,由两角和的三角函数公式,可以得到:

$$\begin{cases} \cos m\lambda = \cos m\lambda_0 \cos m\Delta\lambda - \sin m\lambda_0 \sin m\Delta\lambda \\ \sin m\lambda = \sin m\lambda_0 \cos m\Delta\lambda + \cos m\lambda_0 \sin m\Delta\lambda \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(3)中,有:

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\Delta\lambda + b_{nm} \sin m\Delta\lambda) P_{nm}(\theta) \quad (7)$$

其中,

$$\begin{cases} a_{nm} = C_{nm} \cos m\lambda_0 + S_{nm} \sin m\lambda_0 \\ b_{nm} = S_{nm} \cos m\lambda_0 - C_{nm} \sin m\lambda_0 \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中的右端的参数都是已知的,因此,式(7)的位系数也是已知的。建立一个过渡坐标系,定义为 $P(\rho, \psi, \alpha)$ , $\alpha$ 和新坐标系下的经度关系是: $\alpha = \pi - \sigma$ 。在过渡坐标系中,扰动位球谐展开为:

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{k=0}^n (A_{nk}^* \cos k\alpha + B_{nk}^* \sin k\alpha) P_{nk}(\psi) \quad (9)$$

如果已知位系数 $A_{nk}^*$ 和 $B_{nk}^*$ ,则将 $\alpha = \pi - \sigma$ 代入式(9)可以得到式(5)的位系数:

$$A_{nk} = \begin{cases} A_{nk}^*, k \in \text{偶数} \\ -A_{nk}^*, k \in \text{奇数} \end{cases} \quad (10)$$

$$B_{nk} = \begin{cases} -B_{nk}^*, k \in \text{偶数} \\ B_{nk}^*, k \in \text{奇数} \end{cases} \quad (11)$$

为了建立式(9)和式(7)的关系,利用齐次多项式的一个性质:任一齐次多项式可表示为经过旋转后任意新轴的同阶多项式之和。运用在球面多项式中,令:

$$\begin{cases} P_{nm}(\theta) \cos m\Delta\lambda = \sum_{k=0}^n a_{nm}^k P_{nk}(\psi) \cos k\alpha \\ P_{nm}(\theta) \sin m\Delta\lambda = \sum_{k=0}^n b_{nm}^k P_{nk}(\psi) \sin k\alpha \end{cases} \quad (12)$$

式中, $a_{nm}^k$ 和 $b_{nm}^k$ 是常系数。将式(12)代入式(7)中,得到:

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n (a_{nm}^k a_{nm} \cos k\alpha + b_{nm}^k b_{nm} \sin k\alpha) P_{nk}(\psi) \quad (13)$$

将式(13)右端求和顺序调换,可得到:

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n (a_{nm}^k a_{nm} \cos k\alpha + b_{nm}^k b_{nm} \sin k\alpha) P_{nk}(\psi) \quad (14)$$

将式(14)和式(9)对比后可以得到:

$$\begin{cases} A_{nk}^* = \sum_{m=0}^n a_{nm}^k a_{nm} \\ B_{nk}^* = \sum_{m=0}^n b_{nm}^k b_{nm} \end{cases} \quad (15)$$

由上式可以看出,只要求出常系数 $a_{nm}^k$ 和 $b_{nm}^k$ ,就可以得到过渡坐标系下扰动位系数。在球面三角形<sup>[17]</sup>中存在以下关系:

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \cos\psi + \sin\theta_0 \sin\psi \cos\alpha \quad (16)$$

因此,可以得到两个递推关系式:

$$(n-k)(n-k+1) \sin\theta_0 a_{nm}^{k+1} = -2(n-m+1) \cdot a_{(n+1)m}^k + 2(n-k+1) \cos\theta_0 a_{nm}^k + \sin\theta_0 a_{nm}^{k-1} \quad (17)$$

$$(n+k)(n+k+1) \sin\theta_0 a_{nm}^{k+1} = -2(n+k) \cos\theta_0 \cdot$$

$$a_{mm}^k + \sin\theta_0 a_{mm}^{k-1} + 2(n+m)a_{(n-1)m}^k \quad (18)$$

式(17)、式(18)给出了  $a_{mm}^k$  的递推关系式,只要已知初始值  $a_{mm}^0$ ,利用以上两个关系式中的任何一个就可以求出所有的  $a_{mm}^k$ 。

$a_{mm}^k$  的初始值:

$$a_{mm}^0 = P_{mm}(\theta_0) \quad (19)$$

用相同的方法可以得到  $b_{mm}^k$  的递推公式:

$$(n-k)(n-k+1)\sin\theta_0 b_{mm}^{k+1} = -2(n-m+1) \cdot b_{(n+1)m}^k + 2(n-k+1)\cos\theta_0 b_{mm}^k + \sin\theta_0 b_{mm}^{k-1} \quad (20)$$

$$(n+k)(n+k+1)\sin\theta_0 b_{mm}^{k+1} = -2(n+k) \cdot \cos\theta_0 b_{mm}^k + \sin\theta_0 b_{mm}^{k-1} + 2(n+m)b_{(n-1)m}^k \quad (21)$$

由于  $b_{mm}^0 = 0$ ,现直接给出初始值  $b_{mm}^1$  [4]:

$$b_{mm}^1 = \frac{2}{n(n+1)\sin\theta_0} m P_{mm}(\theta_0) \quad (22)$$

## 2 Clenshaw 求和方法

当极点为飞行器的动量距  $h$  与不动外壳的交点时,飞行器沿着新赤道飞行,此时  $\psi = 90^\circ$ ,应用 Clenshaw 求和计算 [8, 18],只需要计算很少的加法和乘法运算就可以得到扰动引力。径向扰动引力的表达式为:

$$\delta_\rho = -\frac{GM}{r^2} \cdot \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m} \cos m\lambda \cdot \bar{P}_n^m(\theta) + \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m \sin m\lambda \bar{P}_n^m(\theta) \quad (23)$$

令:

$$\begin{aligned} zc &= \sum_{n=0}^N \left( \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m} \cos m\lambda \bar{P}_n^m(\theta) \right) = \\ & \sum_{m=0}^N Szc_i \cos m\lambda \\ zs &= \sum_{n=0}^N \left( \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m \sin m\lambda \bar{P}_n^m(\theta) \right) = \\ & \sum_{m=0}^N Szs_i \sin m\lambda \end{aligned} \quad (24)$$

其中,

$$\begin{aligned} Szc_i &= \sum_{n=m}^N (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m} \bar{P}_n^m(\theta) \\ Szs_i &= \sum_{n=m}^N (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m \bar{P}_n^m(\theta) \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)为 Clenshaw 求和级数,在新球坐标系下,  $Szc_i$  和  $Szs_i$  是固定值。利用 Clenshaw 求

和计算时,  $\cos m\lambda$  的输入参数为  $y_n = (n+1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m}$ ,  $\sin m\lambda$  的输入参数为  $y_n = (n+1) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m$ 。由于南北方向的扰动引力表达式中出现了两个正常化缔合 Legendre 函数,因此 Clenshaw 求和级数变为 4 个:

$$\begin{aligned} S_1 xc_i &= \sum_{n=m}^N n \cos\theta \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m} \bar{P}_n^m(\theta) \\ S_1 xs_i &= \sum_{n=m}^N n \cos\theta \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m \bar{P}_n^m(\theta) \\ S_2 xc_i &= \sum_{n=m}^N -\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{n^2-m^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot \bar{C}_n^{*m} \bar{P}_{n-1}^m(\theta) \\ S_2 xs_i &= \sum_{n=m}^N -\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{n^2-m^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot \bar{C}_n^{*m} \bar{P}_{n-1}^m(\theta) \end{aligned} \quad (26)$$

同式(25)一样,输入参数均为正常化缔合 Legendre 函数前的系数。而东西方向的 Clenshaw 求和级数为:

$$\begin{aligned} Syc_i &= \sum_{n=m}^N m \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_n^m \bar{P}_n^m(\theta) \\ Sys_i &= \sum_{n=m}^N -m \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{*m} \bar{P}_n^m(\theta) \end{aligned} \quad (27)$$

将极轴选择在与飞行器轨道面垂直,则轨道的余纬始终为  $90^\circ$ ,计算扰动引力 3 个分量只需要存储  $6(N+1)$  个三角函数系数,并且不再计算复杂的缔合勒让德函数。

## 3 算例及分析

通过模拟计算出一段轨道,轨道上扰动引力的计算采用传统方法、传统换极方法和改进换极方法。为便于比较,传统换极方法采用前文提到的第二种换极方法,改进的换极方法采用前文提到的第一种换极方法并引入 Clenshaw 求和计算。假设传统球谐函数计算的扰动引力值为真值,则采用传统换极后计算的扰动引力误差统计结果如表 1,从表 1 中可以看出,换极前后计算的扰动引力差值在径向上最小,在东西方向最大,最大值达到 0.04 mGal。需要说明的是采用前文提到的第一种换极方法,换极后计算的扰动引力误差各方向小于 0.001 mGal。传统换极方法存在较大误差是因为在新极点附近计算缔合勒让德函数是有奇异性的。

表1 传统换极计算精度统计

Tab. 1 Statistics of the Calculation errors for Traditional Pole Transform

扰动引力	差值/mGal		
	最大值	平均值	标准差
$\delta_\rho$	0.00	0.00	0.00
$\delta_\theta$	1.83	0.64	0.90
$\delta_\lambda$	0.57	-0.43	0.45

扰动重力场模型的位系数个数同模型的最高阶次有关,假设最高阶次为  $N$ ,则采用传统方法、传统换极方法和改进换极方法的计算公式分别为:  $(N+1)(N+2)$ ,  $(N+1)(N+2)/2$  和  $6(N+1)$ 。受正常化过程的限制,本文采用 EGM2008 前 72 阶次扰动重力场模型。试验统计了 6 400 个扰动重力的计算速度,采用 3 种方法统计结果如表 2。通过比较可以看出,采用换极方法可以提高计算速度:传统换极方法可以提高近一倍的速度,改进换极方法计算速度提高了两个数量级。计算扰动引力的速度有很大提高,但是极点附近的计算是奇异的。采用换极方法还可以节省存储空间:传统换极方法可以节省一半的存储空间,采用改进换极方法的数据量仅为传统方法的 1/10。

模拟实验的轨道为从地面起飞开始的一段轨迹,采用扰动重力场模型计算的扰动引力各分量如图 2 所示。从图中可以看出,地球外部扰动引力的信息范围在  $-20 \text{ mGal} \sim 25 \text{ mGal}$ ,对精确定轨的飞行器来说不可忽略。

表2 试验结果统计

Tab. 2 Statistics of the Simulation Results

单点扰动引力	传统方法	传统换极方法	改进换极方法
计算速度/ms	0.390	0.229	0.003
位系数个数	5 402	2 701	438

采用传统换极后扰动引力误差结果如图 3,对于极点附近的扰动引力计算采取了奇异点处理方法。从图中可以看出,南北方向扰动引力差值随高度有明显变化,在东西方向和径向变化平缓,对于径向,扰动引力误差几乎为 0。

## 4 结 语

球谐函数变换理论是为实现航天器轨道扰动引力快速赋值而产生的一个位模型变换理论,本文在球谐函数变换理论基础上,利用变换后航天器轨道的特殊性质,引入了 Clenshaw 求和理论,实现了轨道扰动引力的快速赋值,并且计算扰动引力所需要存储的数据量也大幅度减少。

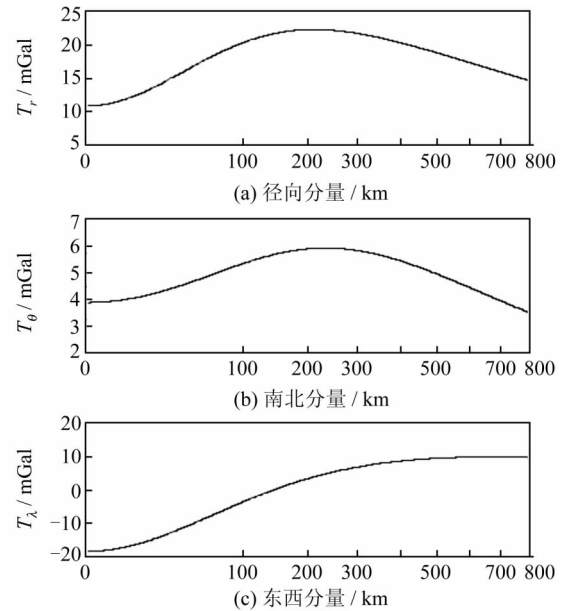


图2 轨道上的扰动引力

Fig. 2 Earth's Gravity Disturbance on the Track

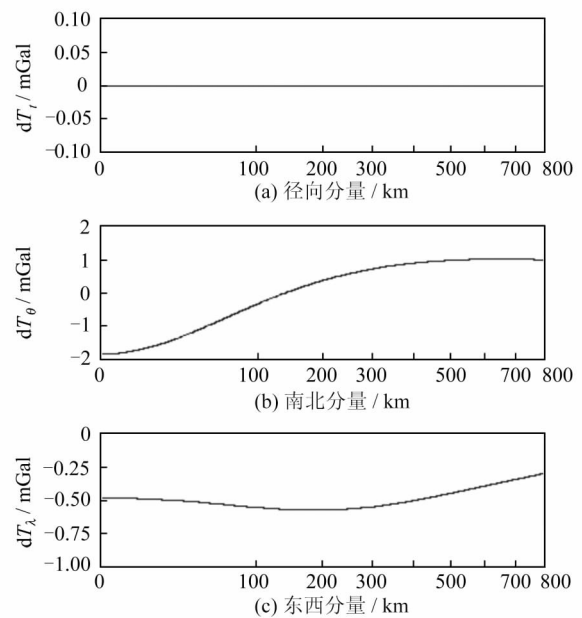


图3 换极计算前后扰动引力差异

Fig. 3 Difference of Gravity Disturbance Caused by Pole Changing

## 参 考 文 献

- [1] 刘林. 航天器轨道理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [2] 郑伟, 钱山, 汤国建. 弹道导弹制导计算中扰动引力的快速赋值[J]. 飞行力学, 2007, 25(3): 42-48
- [3] Zhao Dongming. Approximation of the Earth's Outer Gravity Field and State Estimation of Gravity Satellite[D]. Wuhan: Wuhan University, 2009
- [4] 任萱. 扰动引力作用时自由分行弹道计算的新方法

- [J]. 国防科技大学学报, 1985, 50(2): 41-52
- [5] 郑伟. 地球物理摄动因素对远程弹道导弹命中精度的影响分析及补偿方法研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2006
- [6] 王昱. 扰动引力的快速计算及其落点偏差的影响[D]. 长沙:国防科技大学, 2002
- [7] 许厚泽, 蒋福珍. 关于重力异常球函数展式的变换[J]. 测绘学报, 1964, 7(4): 252-260
- [8] Clenshaw C W. A Note on the Summation of Chebyshev Series[M]. NY: John Wiley Sons Inc, 1955
- [9] 王建强, 李建成, 赵国强, 等. 利用 Clenshaw 求和计算大地水准面差距[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(3): 286-289
- [10] 贾沛然, 沈为异. 弹道导弹弹道学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1980
- [11] 贾沛然, 陈克俊, 何力. 远程火箭弹道学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993
- [12] 程国采. 弹道导弹制导方法与最优控制[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1987
- [13] 海斯卡涅 W A, 莫里斯 H. 物理大地测量学[M]. 北京: 测绘出版社, 1979
- [14] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010
- [15] Jahnke E, Emde F. Tables of Runctions [M]. Teubner: Leipzig, 1938
- [16] Hobson E W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics[M]. New York: Chelsea, 1931
- [17] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy[M]. San Francisco: Freeman and Company, 1967
- [18] 管泽霖, 鄂栋臣. 按克林索求和计算大地水准面差距垂线偏差及重力异常[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1986, 26(4): 75-82

第一作者简介: 王建强, 讲师, 博士, 现主要从事大地测量研究。  
E-mail: wjq86991@163.com

## Pole Transform of Spherical Harmonic Function to Quickly Calculate Gravity the Disturbance on Earth-Orbiting Satellites

WANG Jianqiang<sup>1</sup> LI Jiancheng<sup>2</sup> WANG Zhengtao<sup>2</sup> ZHAO Guoqiang<sup>3</sup>

(1 Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, 418 Guanglan Road, Nanchang 330013, China)

(2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(3 Institute of Earthquake Science China Earthquake Administration, 63 Fuxing Road, Beijing 100036, China)

**Abstract:** The spherical harmonics transform is a method to improve the calculation speed of the earth's gravity disturbsance on orbiting satellites. Based on the particularity of the trajectory for pole transformation, the Clenshaw sun method is introduced to calculate the gravity disturbance on the new coordinates. Then, a comparative analysis focuses on the calculation speed and physical space needs using three methods; the traditional, pole transform, and improved pole transform methods. A simulation using the three methods is used to calculate the gravity disturbance on one period of the orbit. Test results show that the improved pole transformation of spherical harmonic functions is 100 times the calculation speed of the traditional pole transformation method. Furthermore, the data storage capacity required by the new method is only three percent of the traditional method.

**Key words:** the earth's disturbing gravity; clenshaw sum; spherical harmonic functions; pole transform

**About the first author:** WANG Jianqiang, lecture, Ph.D. He majors in geodesy.  
E-mail: wjq86991@163.com