

# SST-HL 模式下利用卫星均值加速度反演地球重力场

钟 波<sup>1,2</sup> 罗志才<sup>1,2</sup> 周 浩<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

(2 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)

**摘 要:**探讨了 SST-HL 模式下利用卫星均值加速度反演地球重力场的实用解算模型,给出了抑制卫星均值加速度高频误差的滤波方法和具体数据处理方案。采用 61 d 的 GOCE 几何法轨道和加速度计数据,在 Kaula 正则化约束条件下求解了 100 阶次的重力场模型 WHU-GOCE-SST01S(RE),结果表明其整体精度优于 EIGEN-CHAMP03S 和 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 模型,验证了所提数据处理方法的有效性。

**关键词:**加速度法;地球重力场;高频误差;SST-HL;GOCE

中图分类号:P223.0

高低卫-卫跟踪测量(SST-HL)主要提供了卫星精密轨道和非保守力数据,利用这些数据可以精确确定地球重力场的中低阶位系数。目前,基于 SST-HL 技术反演地球重力场的主要方法有能量法<sup>[1-2]</sup>、动力法<sup>[3-4]</sup>和加速度法<sup>[5-8]</sup>。其中,能量法和动力积分法是目前最为常用的两种方法,国际上公布的卫星重力场模型多数是采用这两种方法解算。但是,能量法对卫星速度的精度要求较高,而动力法的计算较为复杂,因此,加速度法引起了许多学者的关注,并取得了一些重要进展<sup>[9-13]</sup>。

利用加速度法恢复重力场需要解决的关键问题是高精度卫星加速度的数值微分计算及其高频误差的滤波(或定权)处理。文献[7]根据牛顿插值数值微分公式计算卫星瞬时加速度,并以显式构造的卫星加速度误差协方差阵进行定权。文献[8-10]采用 3 点差分公式计算卫星均值加速度,根据其误差协方差阵的近似循环 Toeplitz 结构,构造了解析白化滤波器对卫星均值加速度进行滤波。文献[12]基于去相关算法构造白化滤波器,分别对卫星瞬时加速度和均值加速度进行去相关滤波。文献[13]研究了基于 ARMA 模型构造白化滤波器对卫星瞬时加速度数据进行去相关滤波

的具体实现方法。本文在文献[12]的基础上,讨论利用卫星均值加速度恢复重力场的解算模型和具体数据处理方案,并以 GOCE SST-HL 数据处理为例对其有效性进行验证。

## 1 加速度法的基本原理

根据牛顿第二运动定律,地心惯性系下的卫星运动方程可表示为:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_e(t) + \mathbf{a}_g(t) + \mathbf{a}_{ng}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{r}(t)$ 为卫星加速度,由卫星轨道数值微分计算;方程右边第一项为地球引力加速度;第二项为除地球引力外的保守力摄动加速度;第三项为非保守力摄动加速度,由星载加速度计测定。

由于利用加速度计数据直接计算非保守力存在尺度误差和系统偏差的影响,因此,在重力场反演中需要对加速度计数据进行重新校准。若将引力位系数  $u = \{\bar{C}_{lm}; \bar{S}_{lm}\}$  和加速度计标校参数  $v = \{S_i; B_i\}$  ( $i = (x, y, z)$ ) 作为未知参数同时求解,由式(1)可得到相应的观测方程为:

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \frac{\partial \mathbf{a}_e(t)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \mathbf{a}_{ng}(t)}{\partial v} \Delta v \quad (2)$$

其中, $\Delta \mathbf{r}(t)$ 为卫星加速度的观测值与计算值之

收稿日期:2013-05-20。

项目来源:国家 973 计划资助项目(2013CB733301,2013CB733302);国家自然科学基金资助项目(41104014,41131067);中国博士后科学基金资助项目(20110491189,2012T50632)。

差;  $\Delta u$ 、 $\Delta v$  分别为重力场位系数和加速度计标校参数的改正数, 其中  $\Delta u$  为全局参数,  $\Delta v$  为局部参数;  $\partial a_e(t)/\partial u$  为地球引力加速度对位系数的偏导数;  $\partial a_{ng}(t)/\partial v$  为非保守力加速度对加速计标校参数  $v$  的偏导数, 具体形式见文献[13]。

令  $x = [\Delta u \ \Delta v]^T$ , 观测方程(2)可表示为:

$$d = Ax + e \tag{3}$$

其中,  $d$  为加速度残差向量;  $A$  为设计矩阵;  $e$  为误差向量。于是, 未知参数的最小二乘解为:

$$\hat{x} = (A^T C_d^{-1} A)^{-1} A^T C_d^{-1} d \tag{4}$$

式中,  $C_d^{-1}$  为卫星加速度观测值的权阵;  $\hat{x}$  为未知参数改正数的估值。

由卫星星历数值微分计算卫星加速度会严重放大高频误差, 因此, 利用加速度法恢复地球重力场必须采用合适的滤波(或定权)方法对其进行抑制。

## 2 卫星均值加速度的计算与滤波处理

卫星均值加速度可认为是时间区间  $[-\Delta t, \Delta t]$  内卫星瞬时加速度的加权平均值[8]:

$$a(t) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} w(s) a(t+s) ds \tag{5}$$

其中,  $a(t+s)$  为  $t+s$  时刻的卫星瞬时加速度;  $w(s)$  为分段线性权函数:

$$w(s) = (\Delta t - |s|) / (\Delta t)^2 \tag{6}$$

式中,  $\Delta t$  为轨道采样间隔。将式(6)代入式(5)可得卫星均值加速度的计算公式:

$$\bar{a}(t) = \frac{x(t-\Delta t) - 2x(t) + x(t+\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{7}$$

其中,  $x(t)$  为  $t$  时刻卫星的位置矢量。

由于采用式(7)计算的卫星加速度精度较低, 为了保证加速度法恢复重力场的精度, 式(1)中其他各项加速度的瞬时计算值同样需要均值化处理, 即:

$$\bar{a}(t) = E(a_e(t) + a_g(t) + a_{ng}(t)) \tag{8}$$

其中,  $E$  为均值滤波算子, 具体形式参见文献[8]。因此, 可得到类似于式(3)和式(4)的均值加速度观测方程及其解:

$$d = EA_p x + e \tag{9}$$

$$\hat{x} = (EA_p)^T C_d^{-1} (EA_p)^{-1} (EA_p)^T C_d^{-1} d \tag{10}$$

式中,  $A_p$  为卫星瞬时加速度对应的设计矩阵;  $EA_p$  表示对  $A_p$  进行均值滤波。

由式(10)可知, 要得到均值加速度观测方程的解, 必须计算卫星均值加速度的权阵  $C_d^{-1}$ , 它可

有效抑制由卫星位置差分计算卫星加速度的高频误差[8,12]。假设卫星位置的协方差为  $C_x = C_y = C_z = \sigma^2 I$ , 观测历元总数为  $N$ , 则由 3 点差分公式(6)计算卫星均值加速度某一分量的协方差矩阵为[12]:

$$C_d^{(\cdot)} = \frac{\sigma^2}{(\Delta t)^4} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \ddots & \\ & 1 & -4 & 6 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{(N-2) \times (N-2)} \tag{11}$$

式中, 符号  $(\cdot)$  表示坐标  $(x, y, z)$  的某一分量;  $\sigma^2$  为位置误差的方差。由于  $C_d^{(\cdot)}$  为 Toeplitz 矩阵, 将其作循环近似并开方, 可得:

$$(\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{(\Delta t)^2} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \ddots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \ddots & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(N-2) \times (N-2)} \tag{12}$$

其中,  $(\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{\frac{1}{2}}$  为  $(C_d^{(\cdot)})^{\frac{1}{2}}$  的近似值。因此, 要计算  $C_d^{(\cdot)}$  的逆, 可近似求出  $(\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{-\frac{1}{2}}$ , 然后根据  $(C_d^{(\cdot)})^{-1} \approx (\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{-\frac{1}{2}} \cdot ((\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{-\frac{1}{2}})^T$  进行计算。由于  $(\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{-\frac{1}{2}}$  为循环 Toeplitz 矩阵, 它与向量(或矩阵的某一列向量)的乘积实际上是一个循环卷积, 相应的时域滤波系数为[8,12]:

$$f_j = \frac{\Delta t \tau}{2\sigma} e^{-\frac{|j| \Delta t}{\tau}} \tag{13}$$

式中,  $\tau = \Delta t / \epsilon$  为滤波半宽;  $\epsilon$  为  $(\tilde{C}_d^{(\cdot)})^{\frac{1}{2}}$  求逆时引入的正则化参数。

由于卫星轨道误差无法精确获知, 实际计算中可由先验信息计算一个初始解, 得到加速度误差的验后估值, 进而根据加速度误差的近似解析形式对位置误差  $\sigma$  和滤波半宽  $\tau$  进行估计。加速度误差的平方根形式为[10]:

$$\sqrt{u(f)} = \frac{\sigma}{(\Delta t)^{3/2}} \left[ 2(1 - \cos(2\pi f \Delta t)) + \left( \frac{\Delta t}{\tau} \right)^2 \right] \tag{14}$$

其中,  $f$  为频率;  $u(f)$  为加速度误差。

## 3 计算与分析

采用 2009-11~2009-12 共计 61 d 的 GOCE L2 几何法轨道和 L1b 加速度计数据进行重力场

解算。其中,几何法轨道的采样率为 1 s,精度为 2~3 cm<sup>[14]</sup>;加速度计数据含有 3 组,分别由重力梯度仪 3 个坐标轴上对称分布的 6 个加速度计组合给出,采样率为 1 s。在不影响解算精度的情况下,本文将几何法轨道和加速度计数据降采样为 5 s,并且将 3 组加速度计的非敏感轴数据剔除后取平均值代替卫星所受到的非保守力,考虑的保守力有日月引力、固体潮、海潮、大气潮、极潮和相对论效应。

为了比较利用卫星均值加速度恢复重力场的效果,本文设计了 3 种计算方案:① 方案 1,基于卫星瞬时加速度按等权同时解算重力场位系数和加速度计标校参数;② 方案 2,以方案 1 解算的卫星加速度验后残差作为加速度误差的估值,通过加速度误差估计位置误差  $\sigma$  和滤波半宽  $\tau$ ,再利用卫星均值加速度同时求解重力场位系数和加速度计标校参数;③ 方案 3,以方案 2 的解算结果为初值,并重复方案 2 的步骤进行一次迭代计算。3 种方案中,地球重力场模型求解的最大阶次为 100,加速度计尺度和偏差参数每天估计一组,整体求解过程中未作正则化处理。

图 1 为 3 种方案的解算模型与高精度的 EIGEN-6S 模型比较得到的大地水准面累积误差,表 1 给出了方案 2 和方案 3 估计的各个坐标分量的位置误差  $\sigma$  和滤波半宽  $\tau$ 。从图 1 可以看出,根据方案 2 恢复重力场的精度相比方案 1 有了较大提高,原因是方案 2 采用滤波公式(13)对卫星加速度的高频误差进行了抑制,该结果验证了本文滤波方法的有效性。方案 3 以方案 2 的解算结果为初值,进一步对卫星加速度误差进行了验后估计,但根据方案 3 恢复重力场的精度相比方案 2 并没有明显的提高,原因是方案 2 和方案 3 分别估计的卫星位置误差和滤波半宽(见表 1)差异较小。

表 1 位置误差和滤波半宽的估计值

Tab. 1 Estimated Values of Orbit Errors and Filtering Half-width

计算方案	坐标轴	$\sigma/cm$	$\tau/s$
方案 2	$x$	1.93	82
	$y$	1.86	80
	$z$	2.84	98
方案 3	$x$	1.91	83
	$y$	1.85	80
	$z$	2.82	98

将方案 3 的解算模型记为 WHU-GOCE-SST01S,并且采用 Kaula 正则化方法<sup>[15]</sup>对方案 3 重新进行约束求解,以削弱 GOCE 观测数据的两

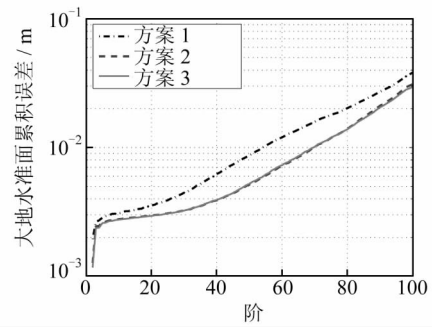


图 1 各方案解算模型相对于 EIGEN-6S 的大地水准面累积误差

Fig. 1 Cumulative Geoid Errors Between the Derived Models and EIGEN-6S Model

极空白问题,相应的解算模型记为 WHU-GOCE-SST01S(RE)。将上述模型与 CHAMP 模型 EIGEN-CHAMP03S 和 GOCE 时域解 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 进行比较,其中, EIGEN-CHAMP03S 是由 33 mon 的 CHAMP 观测数据求解,GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 是由 71 d 的 GOCE 几何法轨道和重力梯度数据联合求解。图 2 给出了各模型与高精度的 EIGEN-6S 模型比较得到的位系数阶误差 RMS。可以看出,WHU-GOCE-SST01S 和 EIGEN-CHAMP03S 模型在低阶部分符合较好,但随着阶数的增加,前者精度优于后者,原因是 GOCE 相比 CHAMP 的轨道设计高度更低,进而有利于提高恢复高阶重力场位系数的精度。WHU-GOCE-SST01S 模型在约 45 阶前的精度优于 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 模型,但在高阶部分后者精度更高,原因是 GOCE 时域解是卫星轨道和重力梯度数据的联合解,并且其求解过程中采用 Kaula 正则化方法对高阶部分进行了约束。本文 Kaula 正则化解算模型 WHU-GOCE-SST01S(RE)的精度明显优于 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 模型。

为了进一步评价 WHU-GOCE-SST01S 模型和 WHU-GOCE-SST01S(RE)模型的精度与可靠性,取上述各模型前 30、60 和 100 阶位系数分别计算全球  $1^\circ \times 1^\circ$  的大地水准面高,表 2 为各模型与 EIGEN-6S 模型比较得到的大地水准面高度差值统计结果。从表 2 可知,WHU-GOCE-SST01S 模型前 30 和 60 阶对应的大地水准面高差的均方根分别为 2.3 cm 和 20.7 cm,明显优于同阶次的 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 模型,而与 EIGEN-CHAMP03S 模型的精度更为接近。当阶数增加至 100 阶时,WHU-GOCE-SST01S 模型和 EIGEN-CHAMP03S 模型的整体精度相

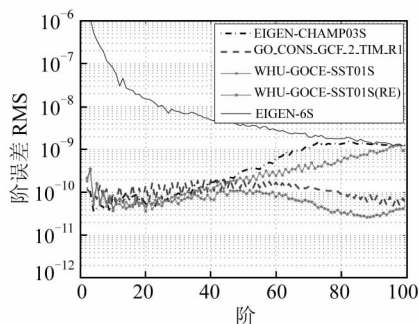


图 2 各种模型相比 EIGEN-6S 的阶误差 RMS  
Fig.2 Degree-Error RMS Between the Compared Models and EIGEN-6S Model

当,但其精度远低于同阶次的 GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 模型。WHU-GOCE-SST01S(RE) 相比 WHU-GOCE-SST01S 模型的前 30 阶精度有所降低,但其展开至 100 阶的大地水准面精度为 6.3 cm,比同阶次的其他比较模型精度高 1 个量级,充分说明了正则化处理的必要性和有效性。

表 2 各模型相比 EIGEN-6S 的大地水准面高度差值统计/cm

Tab.2 Statistical Results of Geoid Differences Between the Compared Models and EIGEN-6S Model/cm

重力场模型	阶数	最大值	最小值	均方根
EIGEN-CHAMP03S	30	6.0	-5.9	1.6
	60	87.2	-79.1	14.4
	100	621.0	-537.7	79.2
GO_CONS_GCF_2_TIM_R1	30	14.9	-60.8	8.9
	60	86.1	-351.0	34.4
	100	167.0	-670.9	54.9
WHU-GOCE-SST01S	30	13.4	-12.3	2.3
	60	178.4	-123.3	20.7
	100	901.8	-602.7	79.9
WHU-GOCE-SST01S(RE)	30	9.8	-20.1	3.4
	60	21.4	-37.9	5.7
	100	49.4	-88.2	6.3

## 4 结 语

利用卫星均值加速度恢复重力场中的一个关键环节是对卫星加速度误差进行估计,并根据加速度误差估计各个坐标分量的位置误差和滤波半宽,进而构造滤波器对卫星加速度高频误差进行抑制。本文将根据卫星瞬时加速度等权求解的地球重力场模型作为初值,通过多次迭代计算对卫星加速度误差进行验后估计和精化。但计算结果表明,多次迭代计算对重力场解算精度的提高并不明显,并且大大增加了计算负担,因此,建议在实际应用中可参考本文的数据处理方案进行一次

迭代计算即可。

致谢:感谢欧空局(ESA)提供本文计算所需的 GOCE 卫星精密轨道和加速度计数据。

## 参 考 文 献

- [1] Visser P N A M, Sneeuw N, Gerlach C. Energy-integral Method for Gravity Field Determination from Satellite Orbit Coordinates[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 207-216
- [2] 徐天河, 杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. 地球物理学报, 2005, 48(2): 288-293
- [3] 张兴福, 沈云中. 利用动力学法标校 CHAMP 卫星加速度计数据[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2007, 32(2): 176-179
- [4] 邹贤才. 卫星轨道理论与地球重力场模型的确定[D]. 武汉: 武汉大学, 2007
- [5] 沈云中. 应用 CHAMP 卫星星历精化地球重力场模型的研究[D]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2000
- [6] 徐天河, 杨元喜. 利用 CHAMP 卫星星历及加速度计数据推求地球重力场模型[J]. 测绘学报, 2004, 33(2): 95-99
- [7] Reubelt T, Austen G, Grafarend E G. Harmonic Analysis of Earth's Gravitational Field by Means of Semi-continuous Ephemerides of a Low Earth Orbiting GPS-tracked Satellite. Case Study: CHAMP [J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 257-278
- [8] Dimar P, van Eck van der Sluijs A A. A Technique for Modeling the Earth's Gravity Field on the Basis of Satellite Accelerations[J]. Journal of Geodesy, 2004, 78: 12-33
- [9] Dimar P, Kuznetsov V, van Eck van der Sluijs A A, et al. 'DEOS\_CHAMP-01C\_70': A Model of the Earth's Gravity Field Computed from Accelerations of the CHAMP Satellite[J]. Journal of Geodesy, 2006, 80: 586-601
- [10] Ditmar P, Liu Xianglin. Dependence of the Earth's Gravity Model Derived from Satellite Accelerations on a Priori Information[J]. Journal of Geodynamics, 2007, 43: 189-199
- [11] 赵齐乐, 郭靖, 柳响林, 等. 利用星载 GPS 历元差分计算的平均加速度反演地球重力场[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2009, 34(10): 1168-1171
- [12] 宁津生, 钟波, 罗志才, 等. 基于卫星加速度恢复地球重力场的去相关滤波法[J]. 测绘学报, 2010, 39(4): 331-337
- [13] 钟波, 汪海洪, 罗志才, 等. ARMA 滤波在加速度法反演地球重力场中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36(12): 1495-1499

- [14] Bock H, Jäggi A, Meyer U, et al. GPS-derived Orbits for the GOCE Satellite[J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85: 807-818
- [15] 钟波, 宁津生, 罗志才, 等. 联合 GOCE 卫星轨道和重力梯度数据严密求解重力场的模拟研究[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2012, 37(10): 1 215-

1 220

第一作者简介: 钟波, 讲师, 博士后, 主要从事物理大地测量学和卫星重力学研究。

E-mail: bzhong@sgg.whu.edu.cn

## Gravity Field Recovery Using Satellite Average Accelerations Derived from High-low Satellite-to-satellite Tracking

ZHONG Bo<sup>1,2</sup> LUO Zhicai<sup>1,2</sup> ZHOU Hao<sup>1</sup>

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** The practical mathematical model for gravity field recovery using satellite average accelerations derived from SST-HL mode is discussed. As the numerical differentiation will rapidly amplify the high-frequency noise in orbit-derived accelerations, the filtering method and specific data processing scheme for suppressing the high-frequency noise of satellite average accelerations are presented. As a test, an Earth's gravity field model WHU-GOCE-SST01S(RE) up to degree and order 100 is recovered with Kaula regularization constrain from 61-day GOCE kinematic orbits and accelerometer data. The result shows that the total accuracy of WHU-GOCE-SST01S(RE) is more accurate than EIGEN-CHAMP03S model and GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R1 model, which validates the effectiveness of the proposed data processing method.

**Key words:** acceleration approach; Earth's gravity field; high-frequency noise; SST-HL; GOCE

---

**About the first author:** ZHONG Bo, lecturer, postdoctor, majors in physical geodesy and satellite gravimetry.

E-mail: bzhong@sgg.whu.edu.cn