

## 傅立叶级数支持下的等高线多尺度表达模型

刘鹏程<sup>1</sup> 艾廷华<sup>2</sup> 毕旭<sup>1</sup>

(1 华中师范大学城市与环境科学学院,武汉市珞喻路 152 号,430079)

(2 武汉大学资源与环境科学学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘要:基于傅立叶级数提取等高线的特征向量,并提出了一种等高线多尺度表达的数据模型。对开等高线采用以首尾点连线作镜像处理的方式将其拓展成闭合曲线,进而将闭合曲线描述成弧长的周期函数,并将其表示为傅立叶级数。以一定阶次的傅立叶级数展开曲线与原始曲线形成的缝隙面积为依据,计算当前展开曲线的比例尺,建立傅立叶级数展开项数与等高线比例尺的对应关系。不同于传统的通过对曲线上点和弯曲的取舍来实现尺度变化的方法,通过控制傅立叶特征向量的长度来实现不同尺度的等高线表达。

关键词:多尺度表达;曲线综合;傅立叶级数

中图法分类号:P208

地图等高线数据具有复杂、多样、密集等特点,常用的等高线多尺度表达方法有 Nth 点算法、Douglas-Peucker 算法等<sup>[1-3]</sup>。这些方法均是通过曲线上点的取舍来构建不同尺度的图形表达,不是从空间认知意义上解析地图要素的空间知识。文献[4-5]通过建立曲线的弯曲树状结构,以叶子弯曲的删除、化简来实现曲线的多尺度表达,能有效地保持曲线的形态特征,但难以形成连续尺度的图形表达。

曲线从小比例尺到大比例尺的表达,可以看成是曲线从近似描述到精确表达的一个渐变。如果将曲线描述成一个收敛的无穷级数,当级数的项数越多时,曲线越趋近原曲线。由此可见,级数的项数与曲线的比例尺之间存在一定的联系。项数越少,对应的比例尺就越小,反之亦然。基于此,本文试图将等高线曲线描述成傅立叶级数,并建立傅立叶级数的项数与等高线比例尺的对应关系。文献[6]基于同样的思路,利用离散傅立叶级数进行闭合曲线的多尺度表达,而本文对等高线采用连续函数的傅立叶级数表达,并能针对开曲线,更具通用性。

## 1 曲线的傅立叶描述子的模型

## 1.1 闭合等高线的傅立叶描述子

数字地图上,通常将闭合等高线表示为一组

首尾点重合的点串,曲线上的点能够描述成以其周长为周期的周期函数。在图 1 中,由点列  $P_0, P_1, \dots, P_N$  构成闭合等高线 ( $P_0, P_N$  重合),以  $P_0$  为起点,则曲线上的任一点  $P_s(X_s, Y_s)$  都可表达为曲线长度  $s$  的分段函数,具体的表达为:

$$\begin{cases} X(s) = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{S_{i+1} - S_i}(s - S_i) \\ Y(s) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{S_{i+1} - S_i}(s - S_i) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $S_i$  为端点  $P_i$  到起点  $P_0$  的曲线长;  $S_i \leq s \leq S_{i+1}, 0 \leq i \leq N-1$ ;  $(X_i, Y_i)$  为点  $P_i$  的坐标。函数  $X_s, Y_s$  均是以多边形周长为周期的周期函数,故均能用傅立叶级数表示,通过式(2)可求得:

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \frac{A_0^X}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n^X \cos \frac{2n\pi s}{L} + B_n^X \sin \frac{2n\pi s}{L} \right) \\ Y(s) &= \frac{A_0^Y}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n^Y \cos \frac{2n\pi s}{L} + B_n^Y \sin \frac{2n\pi s}{L} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,

收稿日期:2012-12-15。

项目来源:国家 863 计划资助项目(2012AA12A404);武汉大学数字制图与国土应用工程国家测绘地理信息局地理信息重点实验室开放研究基金资助项目(GCWD201005)。

$$\left. \begin{aligned}
 A_n^X &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left[ x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{S_{i+1} - S_i} (s - S_i) \right] \cos \frac{2n\pi s}{L} ds \\
 B_n^X &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left[ x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{S_{i+1} - S_i} (s - S_i) \right] \sin \frac{2n\pi s}{L} ds \\
 A_n^Y &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left[ y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{S_{i+1} - S_i} (s - S_i) \right] \cos \frac{2n\pi s}{L} ds \\
 B_n^Y &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left[ y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{S_{i+1} - S_i} (s - S_i) \right] \sin \frac{2n\pi s}{L} ds
 \end{aligned} \right\} (3)$$

在地图的多尺度表达中,尺度越小,需要展现的曲线细节就越详细。因此,可以通过控制傅立叶级数的项数来实现控制等高线曲线的多尺度表达。一定项数的傅立叶级数对应一定尺度的等高线表达,但不同复杂程度和规模的等高线,其对应关系可能存在较大的差异。确定傅立叶级数的项数后,函数自变量  $s$  在原曲线的周长范围内等间隔取值,根据级数模型分别计算得到每一个  $s$  的坐标,构成当前尺度下的曲线图形。一般来说,比例尺越大,  $s$  的间隔必须越小。

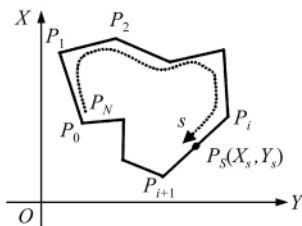


图1 多边形上动点的函数表达

Fig. 1 Function Representation of a Moving Point on Polygon

### 1.2 开曲线的傅立叶形状描述子

地图开曲线上的点同样可按式(1)进行描述,但由于其不具备周期性,必须将其拓展为周期函数才能表达成傅立叶级数。本文将曲线以首尾点的连线作镜像处理,如图2所示,构成的闭合曲线的傅立叶级数则可用式(2)求得。重构曲线时,应注

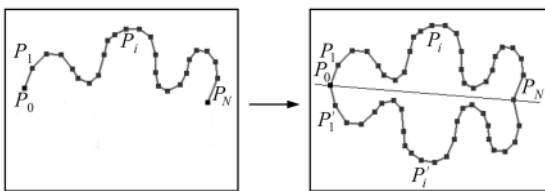


图2 曲线要素经过镜像处理后构成的多边形

Fig. 2 Polygon Constructed Through Mirroring Process of a Curve

意自变量  $s$  的定义域为开曲线的周长,而不是拓展的闭合曲线的周长。通过对开曲线的周期拓展,使得所有的曲线(包括闭合曲线和开曲线)均可通过傅立叶形状描述子来表达。

## 2 傅立叶级数的项数与曲线比例尺对应关系的建立

由曲线多尺度表达的特性知:比例尺越大,要求级数逼近原曲线的程度越高,因而傅立叶级数的项数必须越长。文献[7-8]对不同形状多边形的傅立叶展开式的精度进行了研究,结果表明不同形状相同项数的傅立叶展开式的精度并不相同,多边形越光滑,傅立叶形状描述子的收敛速度越快,圆的收敛速度最快。但这仅仅是定性研究。下面给出建立傅立叶级数展开项数与曲线比例尺对应关系的具体算法:项数为  $K$  项的傅立叶级数展开式所形成的曲线与原曲线必然形成众多缝隙,缝隙面积大小是其逼近精度的体现。就同一曲线而言,  $K$  值越大,拟合曲线越逼近原曲线,缝隙面积就越小,当缝隙面积接近于零时,拟合曲线便与原要素接近重合,如图3所示。其中,粗线为原曲线,细线为傅立叶逼近曲线,斜线填充的区域为两曲线形成的缝隙。

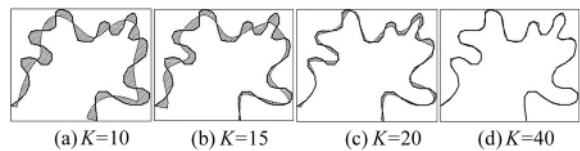


图3 K不同时傅立叶展开曲线与原曲线形成的缝隙

Fig. 3 Slits Formed by Original Curve and Its Expanded Curve of  $K$ -scale Fourier Series

根据缝隙面积可反算出项数为  $K$  的傅立叶形状描述子所对应的比例尺,图4标出了两曲线多个缝隙的宽度,将缝隙的平均深度  $d_{svo}$  当作最小可辨目标(smallest visible object, SVO)的尺寸对应的实际长度,平均深度  $d_a$  可由缝隙面积与曲线长度求得,最后可按式(4)计算出  $K$  项傅立叶形状描述子对应的地图比例尺:

$$M_{scale} = d_a / d_{svo} = \delta S / d_{svo} l \quad (4)$$

其中,  $M_{scale}$  为地图比例尺分母;  $d_{svo}$  为地图最小可分辨距离,  $d_{svo} \in [0.3, 0.5]$ , 单位为 mm;  $l$  为原曲线长度;  $S$  为缝隙的总面积值;  $\delta$  为面积系数,  $\delta \in [0.5, 1.5]$ , 当曲线形成的缝隙均近似为三角形时  $\delta = 0.5$ , 当曲线形成的缝隙均近似为长方形时  $\delta = 1.0$ , 本文取  $\delta = 2/3$ 。

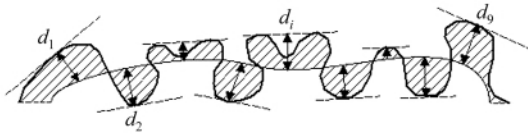


图 4 傅立叶 K 阶展开曲线与原曲线形成的缝隙的深度

Fig. 4 Depth of Slits Formed by Original Curve and Its Expanded Curve of K-scale Fourier Series

可以采用 XML 文件对曲线不同项数的傅立叶级数对应的比例尺进行描述,下面的 XML 文件中给出了两条等高线曲线不同项数的傅立叶级数展开。从文件给出的数据可以看出,在傅立叶级数的项数较小时比例尺的变化均较大;随着级数项数增加,比例尺的变化逐渐减小;当项数增加到某一数字时,比例尺趋于稳定。另外,不同的曲线由于其规模、形状等特性的不同,相同项数的傅立叶级数展开式对应的曲线比例尺一般是不同的,有的甚至相差很大。当曲线要进行某一比例尺的表达时,通过 XML 文件查询每条曲线在该比例尺对应的傅立叶级数的项数,而后通过级数展开得到新的坐标串,构成当前比例尺下的曲线。需要注意的是,当展开项数很大时,计算得出的比例尺可能大于原始曲线的比例尺,此时曲线的比例尺应当取原曲线的比例尺。

```
<? xml version=" 1.0" encoding=" utf-8" ? >
<FourierExpandXML>
<缝隙面积>338003.9</缝隙面积>
  <比例尺分母>171779</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 60">
  <缝隙面积>101588.0</缝隙面积>
  <比例尺分母>37439</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 100">
  <缝隙面积>64897.0</缝隙面积>
  <比例尺分母>21916</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 140">
  <缝隙面积>49330.6</缝隙面积>
  <比例尺分母>15723</比例尺分母>
</项数>
</Feature>
  <Feature ID=" 134">
<项数 Length=" 20">
  <缝隙面积>163409.6</缝隙面积>
  <比例尺分母>112302</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 60">
```

```
<缝隙面积>71033.5</缝隙面积>
<比例尺分母>34724</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 100">
  <缝隙面积>48432.9</缝隙面积>
  <比例尺分母>21399</比例尺分母>
</项数>
<项数 Length=" 140">
  <缝隙面积>35842.8</缝隙面积>
  <比例尺分母>14718</比例尺分母>
</项数>
</Feature>
</FourierExpandXML>
```

### 3 实验分析及总结

图 5 是某地 1 : 2 500 比例尺面积为 5 km<sup>2</sup> 区域的等高线数据在不同比例尺下通过傅立叶级数进行的多尺度表达。图中等高线上的数字表示傅立叶展开式的阶数。从图中可以看出,傅立叶级数有效地实现了等高线的多尺度表达。随着傅立叶级数的项数增加,曲线能够不断地逼近原曲线,等高线的表达越来越精细,能够实现尺度粒度小<sup>[9]</sup>甚至连续尺度的等高线图形表达。

该模型在实际应用中必须处理的问题包括:① 必须编写相应的程序模块进行等高线拓扑关系的检查以及后续处理;② 必须确认在各尺度的表达中地形特征是否得到了好的保存。本文是将数学的逼近理论用于地图要素的多尺度表达,在数学上除了傅立叶级数外还有很多相应的函数,如小波理论等,将它们直接用于地图的多尺度表达的过程中,地图比例尺如何与其建立直接的联系,是必须深入研究的问题。此外,如何将数学上的相关理论用于地图多尺度表达,如何将地理学的理论与数学理论进行结合以及用地理学的原理来弥补数学原理在实际应用中的不足,也是今后值得深入研究的问题。

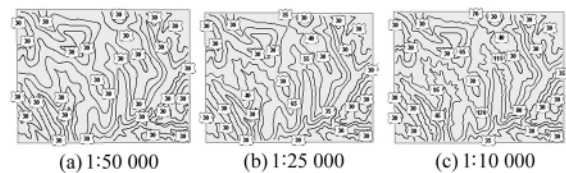


图 5 等高线多尺度表达

Fig. 5 Multi-scale Representation of Contours

### 参 考 文 献

[1] Li Zhilin. Algorithmic Foundation of Multi-Scale Spatial Representation[M]. London: CRC Press,

- 2006
- [2] 毋河海. 基于多叉树的曲线综合算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2004, 29(6): 479-483
- [3] Yang Bisheng. A Multi-resolution Model of Vector Map Data for Rapid Transmission over the Internet [J]. Computer & Geosciences, 2005, 31:569-578
- [4] 艾廷华, 郭仁忠, 刘耀林. 曲线弯曲深度层次结构的二叉树[J]. 测绘学报, 2001, 30(4): 343-348
- [5] 刘鹏程, 杨文博, 李畅. 曲线弯曲多叉树模型及其在地图综合中的应用[J]. 计算机应用研究, 2011, 29(7): 2 793-2 795
- [6] Lawford G J. Fourier Series and Cartographic Line [J]. International Journal of Geographical Information Science, 2006, 1:31-52
- [7] 帅赞, 艾廷华, 帅海燕, 等. 基于形状模板匹配的多边形查询[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(12): 1 267-1 270
- [8] 刘鹏程. 基形状识别在地图综合中的应用研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2009
- [9] 艾廷华. 网络地图渐进式传输中的粒度控制与顺序控制[J]. 中国图像图形学报, 2009, 14(6): 999-1 006
- 
- 第一作者简介: 刘鹏程, 博士, 研究方向为地图综合、模式识别和地理信息系统。  
E-mail: liupc3000@tom.com

## Multi-scale Representation Model for Contour Based on Fourier Series

LIU Pengcheng<sup>1</sup> AI Tinghua<sup>2</sup> BI Xu<sup>1</sup>

(1 College of Urban and Environment Science, Central China Normal University,  
152 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Resource and Environment Science, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** Automatically building of multi-scale representation model based on the same data source has been the focus in the field of map generalization. This paper extracts characteristic vector of contour based on Fourier series, and provides a model of multi-scale representation of contour. Open contours are mirrored into close contours according to the line including the start and end point, then the close contours are expressed into periodical functions about the length of arc and further Fourier series. Building the matching relationship between Fourier series expanding items and contour map scales based on the crack which formed due to the original curve and the current expanding curve. The model based on Fourier series provided in this paper is a method of reconstructing the curve through adjusting the length of characteristic vector instead of selecting the points and bent on the curve in the traditional methods and can be carried out. It is a progressive scale contour representation.

**Key words:** multi-scale representation; curve generalization; Fourier series

---

**About the first author:** LIU Pengcheng, Ph. D. majors in map generalization, pattern cognition and GIS.  
E-mail: liupc3000@tom.com