

地图投影中三种纬度间变换直接展开式

李厚朴^{1,2} 边少锋¹ 刘敏³

(1 海军工程大学导航工程系,武汉市解放大道 717 号,430033)

(2 海岛(礁)测绘技术国家测绘地理信息局重点实验室,青岛市前湾港路 579 号,266510)

(3 海军司令部航海保证部,北京市海淀区西三环中路 19 号,100841)

摘要:利用等距离纬度、等角纬度和等面积纬度这三种纬度和大地纬度间的正反解展开式,全面导出了它们之间变换的直接展开式,并将式中系数统一表示为椭球偏心率 e 的幂级数形式并展至 e^{10} ,解决了不同参考球下的变换问题。算例分析表明,直接展开式的计算精度优于 $10^{-8}''$,满足地图投影精密计算的需要。

关键词:地图投影;等距离纬度;等角纬度;等面积纬度;直接展开式;计算机代数系统

中图分类号:P282

在进行不同变形性质的地图投影计算以及椭球面和球面间的变换时,经常遇到等距离纬度、等角纬度和等面积纬度与大地纬度间的正反解问题^[1-2]。这一问题得到了国内外学者的广泛关注和深入研究^[3-12]。文献[10-12]系统地推导出了这三种纬度和大地纬度间的正反解展开式,将式中系数统一表示为椭球第一偏心率 e 的幂级数形式,使用和记忆都很方便。

研究等距离纬度、等角纬度和等面积纬度间的变换具有重要的应用价值。本文推导出了这三种纬度间变换的直接展开式,并设计算例分析了导出展开式的精度。

1 等距离纬度、等角纬度和等面积纬度及其正反解展开式

1.1 等距离纬度及其正反解展开式

设椭球长半径为 a ,椭球面上由赤道至大地纬度 B 处的子午线弧长 X 为^[1,10]:

$$X = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB \quad (1)$$

等距离纬度 ψ 由下式确定^[2-3]:

$$\psi = (X/X(\pi/2)) \cdot (\pi/2) \quad (2)$$

由文献[12]知,等距离纬度正解展开式为:

$$\psi = B + \alpha_2 \sin 2B + \alpha_4 \sin 4B + \alpha_6 \sin 6B + \alpha_8 \sin 8B + \alpha_{10} \sin 10B \quad (3)$$

等距离纬度反解展开式为

$$B = \psi + a_2 \sin 2\psi + a_4 \sin 4\psi + a_6 \sin 6\psi + a_8 \sin 8\psi + a_{10} \sin 10\psi \quad (4)$$

1.2 等角纬度及其正反解展开式

等角纬度 φ 和大地纬度 B 间的关系式为^[1,10]:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^{\frac{e}{2}} \quad (5)$$

由文献[12]知,等角纬度正解展开式为:

$$\varphi = B + \beta_2 \sin 2B + \beta_4 \sin 4B + \beta_6 \sin 6B + \beta_8 \sin 8B + \beta_{10} \sin 10B \quad (6)$$

等角纬度反解展开式为:

$$B = \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + b_{10} \sin 10\varphi \quad (7)$$

1.3 等面积纬度及其正反解展开式

等面积纬度 ϑ 和大地纬度 B 间的关系式为^[10]:

$$\sin \vartheta = \left(\frac{1}{2(1 - e^2)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sin B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \quad (8)$$

收稿日期:2012-12-07。

项目来源:国家 973 计划资助项目(2012CB719902);国家自然科学基金资助项目(40904018,41071295);国家自然科学基金青年科学基金资助项目(41201478);海岛(礁)测绘技术国家测绘地理信息局重点实验室资助项目(2010B04)。

由文献[12]知,等面积纬度正解展开式为:

$$\vartheta = B + \gamma_2 \sin 2B + \gamma_4 \sin 4B + \gamma_6 \sin 6B + \gamma_8 \sin 8B + \gamma_{10} \sin 10B \quad (9)$$

等面积纬度反解展开式为:

$$B = \vartheta + c_2 \sin 2\vartheta + c_4 \sin 4\vartheta + c_6 \sin 6\vartheta + c_8 \sin 8\vartheta + c_{10} \sin 10\vartheta \quad (10)$$

2 等距离纬度、等角纬度和等面积纬度间变换的直接展开式

2.1 等距离纬度和等角纬度间变换的直接展开式

由式(4)和式(6)即可得出等距离纬度 ψ 变换至等角纬度 φ 的公式为:

$$\begin{cases} B = \psi + a_2 \sin 2\psi + a_4 \sin 4\psi + a_6 \sin 6\psi + a_8 \sin 8\psi + a_{10} \sin 10\psi \\ \varphi = B + \beta_2 \sin 2B + \beta_4 \sin 4B + \beta_6 \sin 6B + \beta_8 \sin 8B + \beta_{10} \sin 10B \end{cases} \quad (11)$$

使用式(11)需要经过两步计算方可完成变换,计算过程较为繁琐。为简化计算,可将上式中的变量 B 消去,得到由等距离纬度 ψ 计算等角纬度 φ 的直接展开式。但是,该过程人工推导起来非常繁琐,借助计算机代数系统 Mathematica^[13] 强大的符号运算功能,通过定义相关系数和变量,在 $e=0$ 处将 φ 展开为 e 的幂级数形式,取至 e^{10} 项

$$\varphi = \text{FullSimplify}[\text{Series}[\varphi, \{e, 0, 10\}]]$$

整理后得到等距离纬度 ψ 计算等角纬度 φ 的直接展开式:

$$\varphi = \psi + \delta_2 \sin 2\psi + \delta_4 \sin 4\psi + \delta_6 \sin 6\psi + \delta_8 \sin 8\psi + \delta_{10} \sin 10\psi \quad (12)$$

式中系数为:

$$\begin{cases} \delta_2 = -\frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{48}e^4 - \frac{7}{2048}e^6 + \frac{17}{184320}e^8 + \frac{17837}{23592960}e^{10} \\ \delta_4 = -\frac{1}{768}e^4 - \frac{3}{1280}e^6 - \frac{559}{368640}e^8 - \frac{1021}{1290240}e^{10} \\ \delta_6 = -\frac{17}{30720}e^6 - \frac{283}{430080}e^8 - \frac{7489}{13762560}e^{10} \\ \delta_8 = -\frac{4397}{41287680}e^8 - \frac{1319}{6881280}e^{10} \\ \delta_{10} = -\frac{4583}{165150720}e^{10} \end{cases} \quad (13)$$

由式(7)和式(3)可得等角纬度 φ 变换至等距离纬度 ψ 的公式为:

$$\begin{cases} B = \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + b_{10} \sin 10\varphi \\ \psi = B + \alpha_2 \sin 2B + \alpha_4 \sin 4B + \alpha_6 \sin 6B + \alpha_8 \sin 8B + \alpha_{10} \sin 10B \end{cases} \quad (14)$$

类似于式(12)的推导,可得等角纬度 φ 变换至等距离纬度 ψ 的直接展开式为:

$$\psi = \varphi + d_2 \sin 2\varphi + d_4 \sin 4\varphi + d_6 \sin 6\varphi + d_8 \sin 8\varphi + d_{10} \sin 10\varphi \quad (15)$$

式中系数为:

$$\begin{cases} d_2 = \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{48}e^4 + \frac{7}{3072}e^6 - \frac{83}{92160}e^8 - \frac{189}{163840}e^{10} \\ d_4 = \frac{13}{768}e^4 + \frac{29}{3840}e^6 + \frac{833}{368640}e^8 + \frac{143}{430080}e^{10} \\ d_6 = \frac{61}{15360}e^6 + \frac{221}{71680}e^8 + \frac{41317}{27525120}e^{10} \\ d_8 = \frac{49561}{41287680}e^8 + \frac{28081}{20643840}e^{10} \\ d_{10} = \frac{34729}{82575360}e^{10} \end{cases} \quad (16)$$

2.2 等距离纬度和等面积纬度间变换的直接展开式

采用与 § 2.1 相同的推导思路,可得等距离纬度 ψ 变换至等面积纬度 ϑ 的直接展开式为:

$$\vartheta = \psi + \epsilon_2 \sin 2\psi + \epsilon_4 \sin 4\psi + \epsilon_6 \sin 6\psi + \epsilon_8 \sin 8\psi + \epsilon_{10} \sin 10\psi \quad (17)$$

式中系数为:

$$\begin{cases} \epsilon_2 = \frac{1}{24}e^2 + \frac{11}{720}e^4 + \frac{1333}{215040}e^6 + \frac{7249}{2764800}e^8 + \frac{269762411}{245248819200}e^{10} \\ \epsilon_4 = \frac{49}{11520}e^4 + \frac{271}{80640}e^6 + \frac{35293}{16588800}e^8 + \frac{2390219}{1916006400}e^{10} \\ \epsilon_6 = \frac{4463}{5806080}e^6 + \frac{55277}{58060800}e^8 + \frac{50581021}{61312204800}e^{10} \\ \epsilon_8 = \frac{331799}{1857945600}e^8 + \frac{9312679}{30656102400}e^{10} \\ \epsilon_{10} = \frac{11744233}{245248819200}e^{10} \end{cases} \quad (18)$$

等面积纬度 ϑ 变换至等距离纬度 ψ 的直接展开式为:

$$\psi = \vartheta + p_2 \sin 2\vartheta + p_4 \sin 4\vartheta + p_6 \sin 6\vartheta + p_8 \sin 8\vartheta + p_{10} \sin 10\vartheta \tag{19}$$

式中系数为:

$$\left\{ \begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{24}e^2 - \frac{11}{720}e^4 - \frac{409}{64\,512}e^6 - \frac{80\,911}{29\,030\,400}e^8 - \frac{3\,797\,279}{3\,065\,610\,240}e^{10} \\ p_4 &= -\frac{29}{11\,520}e^4 - \frac{101}{48\,384}e^6 - \frac{23\,491}{16\,588\,800}e^8 - \frac{576\,923}{638\,668\,800}e^{10} \\ p_6 &= -\frac{1\,003}{2\,903\,040}e^6 - \frac{13\,249}{29\,030\,400}e^8 - \frac{10\,515\,037}{24\,524\,881\,920}e^{10} \\ p_8 &= -\frac{40\,457}{619\,315\,200}e^8 - \frac{3\,653\,003}{30\,656\,102\,400}e^{10} \\ p_{10} &= -\frac{1\,800\,439}{122\,624\,409\,600}e^{10} \end{aligned} \right. \tag{20}$$

2.3 等角纬度和等面积纬度函数间变换的直接展开式

采用与 § 2.1 相同的推导思路,可得等角纬度 φ 变换至等面积纬度 ϑ 的直接展开式为:

$$\vartheta = \varphi + \eta_2 \sin 2\varphi + \eta_4 \sin 4\varphi + \eta_6 \sin 6\varphi + \eta_8 \sin 8\varphi + \eta_{10} \sin 10\varphi \tag{21}$$

式中系数为:

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{6}e^2 + \frac{13}{360}e^4 + \frac{1}{140}e^6 + \frac{359}{604\,800}e^8 - \frac{43\,993}{59\,875\,200}e^{10} \\ \eta_4 &= \frac{19}{720}e^4 + \frac{23}{1\,680}e^6 + \frac{18\,083}{3\,628\,800}e^8 + \frac{79\,237}{59\,875\,200}e^{10} \\ \eta_6 &= \frac{31}{4\,536}e^6 + \frac{10\,621}{1\,814\,400}e^8 + \frac{759\,061}{239\,500\,800}e^{10} \\ \eta_8 &= \frac{16\,049}{7\,257\,600}e^8 + \frac{321\,373}{119\,750\,400}e^{10} \\ \eta_{10} &= \frac{7\,801}{9\,580\,032}e^{10} \end{aligned} \right. \tag{22}$$

等面积纬度 ϑ 变换至等角纬度 φ 的直接展开式为:

$$\varphi = \vartheta + t_2 \sin 2\vartheta + t_4 \sin 4\vartheta + t_6 \sin 6\vartheta + t_8 \sin 8\vartheta + t_{10} \sin 10\vartheta \tag{23}$$

式中系数为:

$$\left\{ \begin{aligned} t_2 &= -\frac{1}{6}e^2 - \frac{13}{360}e^4 - \frac{31}{3\,360}e^6 - \frac{527}{226\,800}e^8 - \frac{34\,037}{119\,750\,400}e^{10} \\ t_4 &= \frac{1}{720}e^4 - \frac{5}{3024}e^6 - \frac{6\,071}{3\,628\,800}e^8 - \frac{23\,039}{19\,958\,400}e^{10} \\ t_6 &= -\frac{53}{90\,720}e^6 - \frac{43}{64\,800}e^8 - \frac{70\,667}{119\,750\,400}e^{10} \\ t_8 &= -\frac{167}{2\,419\,200}e^8 - \frac{17\,861}{119\,750\,400}e^{10} \\ t_{10} &= -\frac{31}{1\,710\,720}e^{10} \end{aligned} \right. \tag{24}$$

3 计算误差分析

为说明上述展开式的可靠性,选用 CGCS2000 椭球常数 $1/f = 298.257\,222\,101^{[14]}$ 进行误差分析。基本思路是:先取定大地纬度 B_0 ,将其分别代入式(2)、式(5)、式(8)中计算,可得等距离纬度、等角纬度、等面积纬度的理论值分别为 $\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0$;将 ψ_0 分别代入式(12)、式(17)可得变换后的等角纬度 φ_1 、等面积纬度 ϑ_1 ;将 φ_0 分别代入式(15)、式(21)可得变换后的等距离纬度 ψ_1 、等面积纬度 ϑ_2 ;将 ϑ_0 分别代入式(19)、式(23)可得变换后的等距离纬度 ψ_2 、等角纬度 φ_2 ;将变换后的计算值分别与理论值 $\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0$ 相减,可得导出的直接展开式的计算误差,分别记为 $\Delta\varphi_1, \Delta\psi_1, \Delta\vartheta_1, \Delta\psi_2, \Delta\vartheta_2, \Delta\varphi_2$,如表 1 所示。

表 1 等距离纬度、等角纬度和等面积纬度间变换的直接展开式的计算误差

Tab. 1 Errors of Direct Expansions of Transformations Between Rectifying, Conformal and Authalic Latitudes

$B_0 / (^\circ)$	$\Delta\varphi_1 / (10^{-11}'')$	$\Delta\psi_1 / (10^{-11}'')$	$\Delta\vartheta_1 / (10^{-10}'')$	$\Delta\psi_2 / (10^{-10}'')$	$\Delta\vartheta_2 / (10^{-10}'')$	$\Delta\varphi_2 / (10^{-10}'')$
10	0.57	-2.3	-0.86	0.63	-1.3	0.63
20	-2.3	3.4	-0.11	0.11	0.34	-0.23
30	-4.6	6.9	-0.23	0.0	0.92	-0.46
40	-6.9	6.9	1.4	-1.1	2.1	-1.6
50	-2.3	0.0	2.5	-2.7	2.5	-2.7
60	-18	14	2.3	-2.3	3.7	-3.7
70	-9.2	9.2	-0.92	1.4	0.0	0.46
80	0.0	0.0	8.7	-8.2	8.7	-8.7
90	0.0	0.0	38	-38	38	-38

由表 1 可以看出,等距离纬度变换至等角纬度的直接展开式(12)的计算精度优于 $10^{-9}''$;等角纬度变换至等距离纬度的直接展开式(15)的计算精度优于 $10^{-9}''$;等距离纬度变换至等面积纬度的直接展开式(17)的计算精度优于 $10^{-8}''$;等面积纬

度变换至等距离纬度的直接展开式(19)的计算精度优于 $10^{-8}''$;等角纬度变换至等面积纬度的直接展开式(21)的计算精度优于 $10^{-8}''$;等面积纬度变换至等角纬度的直接展开式(23)的计算精度优于 $10^{-8}''$ 。可见,本文导出的等距离纬度、等角纬度和等面积纬度间变换的直接展开式的计算精度优于 $10^{-8}''$,完全可以满足地图投影精密计算的需要。

参 考 文 献

- [1] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 解放军出版社, 1989
- [2] Snyder J P. Map Projections-A Working Manual [M]. Washington D C: U S Government Printing Office, 1987
- [3] Adams O S. Latitude Developments Connected with Geodesy and Cartography with Tables, Including a Table for Lambert Equal-Area Meridional Projection [M]. Washington D C: U S Government Printing Office, 1949
- [4] 孙群,杨启和. 底点纬度解算以及等量纬度和面积函数反解问题的探讨[J]. 解放军测绘学院学报, 1985,2: 64-75
- [5] 杨启和, 杨晓梅. 测量和地图学中应用的三种纬度函数及其反解变换的线性插值方法[J]. 测绘学报, 1997, 26(1): 92-93
- [6] Yang Q H, Snyder J P, Tobler W R. Map Projection Transformation: Principles and Applications [M]. London: Taylor & Francis, 2000
- [7] Craig R. Auxiliary Latitude Formulas: Finding the Coefficients Numerically and Symbolically[C]. Wolfram Technology Conference, Champaign, America, 2006
- [8] Bian Shaofeng, Chen Yongbing. Solving an Inverse Problem of a Meridian Arc in Terms of Computer Algebra System[J]. Journal of Surveying Engineering, 2006, 132(1): 7-10
- [9] 郑彤, 边少锋. 子午线弧长反问题新解[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2007, 32(3): 255-258
- [10] 边少锋, 纪兵. 等距离纬度等量纬度和等面积纬度展开式[J]. 测绘学报, 2007, 36(2): 218-223
- [11] 李厚朴, 边少锋. 辅助纬度反解公式的 Hermite 插值法新解[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(6): 623-626
- [12] 李厚朴. 基于计算机代数系统的大地坐标系精密计算理论及其应用研究[D]. 武汉: 海军工程大学, 2010
- [13] 边少锋, 许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004
- [14] 陈俊勇. 中国现代大地基准—中国大地坐标系统 2000(CGCS2000)及其框架[J]. 测绘学报, 2008, 37(3): 269-271

第一作者简介:李厚朴,博士,讲师,研究方向为大地测量和卫星导航。

E-mail:lihoup1985@126.com

Direct Expansions of Transformations Between Three Kinds of Latitudes Used in Map Projection

LI Houpu^{1,2} BIAN Shaofeng¹ LIU Min³

(1 Department of Navigation, Naval University of Engineering, 717 Jiefang Road, Wuhan 430033, China)

(2 Key Laboratory of Surveying and Mapping Technology on Island and Reef, State Bureau of Surveying, Mapping and Geoinformation, 579 Qianwangang Road, Qingdao 266510, China)

(3 Navigation Guarantee Department of the Chinese Navy Headquarters, 19 West 3rd Ring Middle Road, Beijing 100841, China)

Abstract: Considering the traditional transformations between rectifying, conformal and authalic latitudes are comparatively fuzzy, the direct expansions of transformations between three kinds of latitudes are comprehensively derived with the help of computer algebra system Mathematica using the forward and inverse expansions of transformations between the three kinds of latitudes and geodetic latitude. Their coefficients are expressed in a power series of the ellipsoid's first eccentricity, e , and extended up to tenth-order terms of e , which could solve the transformation problem when different reference ellipsoids are used. Numerical examples show that the accuracies of these direct expansions are higher than $10^{-8}''$, and could completely meet the needs of precise calculation in map projection.

Key words: map projection; rectifying latitude; conformal latitude; authalic latitude; direct expansions; computer algebra system

About the first author: LI Houpu, Ph. D, lecturer, majors in geodesy and satellite navigation.

E-mail: lihoup1985@126.com