

广义反距离加权空间推估法

薛树强^{1,2} 杨元喜^{3,4}

(1 长安大学地质工程与测绘学院,西安市雁塔路 126 号,710054)

(2 中国测绘科学研究院,北京市莲花池西路 28 号,100830)

(3 国家地理信息工程国家重点实验室,西安市雁塔路中段 1 号,710054)

(4 西安测绘研究所,西安市雁塔路中段 1 号,710054)

摘要:提出了 k 阶广义反距离加权空间推估法。首先,估计空间函数在已知点处的各阶偏导数;然后,利用泰勒级数逼近原理计算待估点处的函数值,根据空间函数偏导数估值的方差协方差评价推估精度;最后,对待估点处的这些推估值进行最小二乘平差。引入了确定 k 阶广义反距离加权空间推估法阶次 k 的 BIC 准则,并以 GPS 水准推估为例进行了实验。

关键词:空间推估;反距离加权;泰勒级数;概率测度;GPS 水准拟合

中图分类号:P207.1;P208

反距离加权平均法是一种应用非常广泛的空间插值方法^[1-5]。应用反距离加权平均法的基本前提是空间函数服从 Tobler 定理,即假定距离较近的点比距离较远的点其特征值具有更大的相似性^[1,6]。该方法的推估精度取决于模型对要素空间变异性和相关性的反映^[6]。从平差角度,已有研究对反距离加权平均法的改进可分为对函数模型的改进和对随机模型的改进。文献[7]通过引入变差函数对反距离加权方法进行了改进,即通过使用更切实的观测权阵改善插值精度。文献[8]基于移去恢复思想研究了区域 GPS 网高海拔流动站的对流层延迟反距离加权推估问题。文献[3]通过引入邻近等级和一阶偏导数估计,对传统反距离加权平均法的函数模型和随机模型进行了改进,抑制了空间函数线性趋势对空间推估的影响。

当空间函数非常复杂时,除需抑制空间函数的线性信号外,还需抑制二次趋势项甚至更高次趋势项的影响。传统反距离加权平均法从短距离推估向长距离推估,从已知点控制区域中心向边缘推估的应用条件和改进措施也有待深入探讨。本文基于空间函数的泰勒级数逼近原

理,为反距离加权平均法建立了一个通用框架,在该框架下,对传统反距离平均法的函数模型和随机模型进行了改进,提出了广义反距离加权空间推估方法。最后,利用两个算例验证了传统反距离加权法的适用条件和广义方法的应用效果。

1 空间推估函数幂级数逼近原理

1.1 空间推估函数的泰勒级数展开

空间推估是指利用空间分布的实测值推估待估点处的观测值,若待估点位于已知点控制范围内,可称之为内插,若待估点位于控制范围之外,可称之为外推^[9]。设空间函数 $f(x)$ 任意阶可导,自变量 $x \in R^m$ ($m \leq 3$) 为空间点位坐标向量,存在以下观测值:

$$y = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_n)] \in R^n$$

其中, $x_i = [x_{i,1} \quad x_{i,2} \quad \cdots \quad x_{i,m}] \in R^m$ 为第 i 个观测值所在点位的坐标向量。由泰勒定理可知, $f(x + \Delta x)$ 在 x 处的泰勒级数展开为

$$f(x + \Delta x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \times$$

收稿日期:2013-10-25。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41020144004,411104018);国家 863 计划资助项目(2009AA121405);总装备部航天装备总体研究发展中心资助项目(GFZX0301040309)。

$$\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^i f(x) + r^k(\Delta x) \quad (1)$$

其中, $\Delta x = [\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \cdots \quad \Delta x_m]$; 残余项 $r^k(\Delta x)$ 用于估计函数逼近精度。二元函数的泰勒级数展开可参考文献[10]。

1.2 空间推估函数的各阶偏导数估计

以三维空间推估为例,探讨利用 n 个观测值推估函数 $f(x)$ ($x \in R^3$) 在已知点处的各阶偏导数估计方法。在已知点 x_i 处,可构造以下观测方程:

$$f(x_j) = f(x_i + \Delta x_j) = f(x_i) + \sum_{s=1}^k \frac{1}{s!} \times \left(\Delta x_{j,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_{j,2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \Delta x_{j,3} \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^s f(x_i) + r^k(\Delta x_j) \quad (2)$$

其中 $j=1, 2, \dots, n, j \neq i, \Delta x_j = x_j - x_i$ 。式(2)共存在 $n-1$ 个方程,由三项式展开定理可得^[11],其

$$\Delta_{i,2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\Delta_{1,1})^2 & (\Delta_{1,2})^2 & (\Delta_{1,3})^2 & \Delta_{1,1}\Delta_{1,2} & \Delta_{1,2}\Delta_{1,3} & \Delta_{1,1}\Delta_{1,3} \\ (\Delta_{2,1})^2 & (\Delta_{2,2})^2 & (\Delta_{2,3})^2 & \Delta_{2,1}\Delta_{2,2} & \Delta_{2,2}\Delta_{2,3} & \Delta_{2,1}\Delta_{2,3} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ (\Delta_{n,1})^2 & (\Delta_{n,2})^2 & (\Delta_{n,3})^2 & \Delta_{n,1}\Delta_{n,2} & \Delta_{n,2}\Delta_{n,3} & \Delta_{n,1}\Delta_{n,3} \end{bmatrix}$$

$\nabla^1 f(x_i) = [\partial f(x_i)/\partial x_1 \quad \partial f(x_i)/\partial x_2 \quad \partial f(x_i)/\partial x_3]$, $\nabla^2 f(x_i) = [\partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_1^2 \quad \partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_2^2 \quad \partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_3^2 \quad 2\partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_1 \partial x_2 \quad 2\partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_2 \partial x_3 \quad 2\partial^{(2)} f(x_i)/\partial x_1 \partial x_3]$ 。类似地,还可以继续写出 $f(x)$ 在 x_i 处的高阶偏导数。利用最小二乘原理,可由残余项和观测误差的耦合值的平方和最小准则导出矛盾观测方程式(3)的最小二乘解为:

$$\hat{z}_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T \Delta y_i \quad (4)$$

相应地,最小二乘解的方差协方差阵为 $D_{z_i} = (A_i^T A_i)^{-1} \sigma_i^2$, 其中, $\sigma_i^2 = v_i^T v_i / (n-t)$ 为单位权方差估计, $v_i = \Delta y_i - A_i \hat{z}_i$ 为最小二乘残差。

在实际应用中,可将函数 $f(x)$ 的定义域进行分区处理,通过各分区的低阶偏导数进行函数“局部”逼近,再通过“拼合”实现 $f(x)$ 在整个定义域内的逼近。

1.3 模型参数优化准则

贝叶斯信息量准则(Bayesian information criterion, BIC)是衡量统计模型拟合优良性的一种标准,可权衡所估计模型的复杂度和此模型拟合数据的优良性^[12]。当观测误差服从正态分布时, BIC 准则可表示为^[12-13]:

$$BIC_i = n \ln(v_i^T v_i / n) + \ln(n)t + C_0 \quad (5)$$

其中, $t < n$ 为方程(3)未知数的个数; $C_0 = n(1 + \ln 2\pi)$ 为常数。

未知数个数 $t = \sum_{s=1}^k \frac{(s+2)(s+1)}{2}$ 。当 $k=1$ 时,

未知数个数 $t=3$; 当 $k=2$ 时,未知数个数 $t=9$; 当 $k=3$ 时,未知数个数 $t=19$ 。为讨论方便起见,将式(2)简记为:

$$\Delta y_i = A_i z_i + r_i \quad (3)$$

其中

$$\Delta y_i = [f(x_i) - f(x_1) \quad f(x_i) - f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_i) - f(x_n)]$$

$$z_i = [\nabla^1 f(x_i) \quad \nabla^2 f(x_i) \quad \cdots \quad \nabla^k f(x_i)]$$

$$r_i = [r^k(\Delta x_1) \quad r^k(\Delta x_2) \quad \cdots \quad r^k(\Delta x_n)]$$

$$A_i = [\Delta_{i,1} \quad \Delta_{i,2} \quad \cdots \quad \Delta_{i,k}]$$

$$\Delta_{i,1} = \begin{bmatrix} x_1 - x_i \\ x_2 - x_i \\ \vdots \\ x_n - x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n,1} & \Delta_{n,2} & \Delta_{n,3} \end{bmatrix}$$

最小化式(5)可用于确定空间函数在任意已知点处各阶偏导数的最佳维数。简单起见,对于阶数 k 的优化选取,可引入以下优化准则:

$$\overline{BIC} = \sum_{k \in N, k < n} \sum_{i=1}^n BIC_i / n \rightarrow \min \quad (6)$$

其中, $\sum_{i=1}^n BIC_i / n$ 表示在 n 个已知点处 BIC 的平均值。优化准则(6)即通过最小化 BIC 的平均值确定该方法的最佳阶次 k 。

2 k 阶广义反距离加权推估函数

一旦利用式(4)计算得到函数 $f(x)$ 在已知点 x_i 处的各阶偏导数估值,则由该点处的观测值和各阶偏导数估计,可以推估空间中任意待估点处的函数值,即

$$f_i(x) = f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \times \left(\Delta x_{i,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_{i,2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_{i,m} \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^i \hat{f}(x_i) \quad (7)$$

其中, x 为待估点坐标向量; $\Delta x = x - x_i$ 。理论上,只要 k 足够大或 Δx 足够小,式(7)可以以任意精度逼近 $f(x)$ 。为确保推估的精度和可靠性,可利用 n 个已知点推估 $f(x)$,构造虚拟观测值方程:

$$\left\{ \begin{aligned} f_n(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_n) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\Delta x_{n,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_{n,2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_{n,m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^i \hat{f}(\mathbf{x}_n) \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_{n-1} + \Delta \mathbf{x}_{n-1}) = f(\mathbf{x}_{n-1}) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\Delta x_{(n-1),1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_{(n-1),2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_{(n-1),m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^i \times \\ &\quad \hat{f}(\mathbf{x}_{n-1}) \\ &\quad \vdots \\ f_1(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\Delta x_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_{1,2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_{1,m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^i \hat{f}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

由误差传播定律可得,式(7)给出的第 i 个虚拟观测 $f_i(x)$ 的方差为:

$$\sigma_{f_i(x)}^2 = \mathbf{a}_i \mathbf{D}_{z_i} \mathbf{a}_i^T + \sigma_0^2 \quad (9)$$

其中, $\mathbf{a}_i = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \dots \Delta_k]$ 。结合式(9),可将虚拟观测方程的观测权阵构造为:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\sigma_{f_1(x)}^{-2}, \sigma_{f_2(x)}^{-2}, \dots, \sigma_{f_n(x)}^{-2}) \quad (10)$$

观测方程(8)的最小二乘解为:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{f_i(x)}^{-2} f_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^n \sigma_{f_i(x)}^{-2}} \quad (11)$$

式(11)即为 k 阶广义反距离加权推估函数。该方法类似于水准测量,当存在多条路径测量待定点高程时,需以水准路线长度反比例配权获取

待定点的高程。除了 k 阶广义反距离加权推估方法对虚拟观测方程的构造方法进行了推广外,广义化方法还采用了已知点和待估点间的广义距离(概率测度)构造权阵。

3 算 例

1) 小区域高程异常推估。采用文献[14]给出的 GPS 水准网实测数据,区域大小为 $3 \text{ km} \times 7 \text{ km}$,共计存在 25 个实测 GPS 水准点。类似于文献[14],利用 13 个水准点建立空间推估函数,而表 1 给出的 12 个已知点作为检查点检核推估精度。

表 1 检查点处的推估误差对比

Tab. 1 Interpolation Errors at Checkpoints

编号	X/m	Y/m	大地高 H /m	高程异常 $h-H$ /m	多项式 ^[14] /mm	传统反距离/mm		
						$k=0$	$k=1$	$k=2$
1	-872.86	2 305.41	347.051	-0.719	-89.4	87.10	-26.75	-5.14
2	-575.76	2 063	351.084	-0.713	-33.6	76.82	-1.13	4.56
3	137.98	1 839.89	367.309	-0.733	8.7	59.06	8.88	96.64
4	523.87	1 409.31	392.763	-0.767	29	31.87	8.43	4.63
5	663.25	1 326.86	404.282	-0.764	42.6	39.55	19.54	5.01
6	577.81	916.67	409.049	-0.698	40.2	126.84	109.87	5.17
7	592.28	714.3	420.524	-0.807	46.7	26.65	14.16	53.55
8	551.06	437.84	431.534	-0.831	41.5	14.08	7.56	94.51
9	757.49	177.7	459.489	-0.864	27.1	-7.95	-3.08	71.97
10	183.37	-398.82	497.418	-0.846	72.2	55.07	52.56	-5.14
11	275.18	-663.61	529.014	-0.832	100.7	63.06	78.71	4.56
12	408.03	-1135.7	578.826	-0.909	43.9	-19.49	22.79	96.64
绝对误差平均值					48	50.63	29.45	38.03
误差之和					329.6	552.65	291.53	446.04

表 1 给出了二次多项式法、传统反距离加权法、广义反距离加权法在检查点处的推估误差,其中,多项式法计算结果直接引用文献[14]。检查点处的平均推估误差和推估误差之和表明,一阶广义反距离加权推估法相对于二次多项式法具有更高的推估精度,二阶广义反距离加权推估法略优于二次多项式法,而传统反距离加权平均法的推估精度最低。

2) 大区域高程异常推估。选取某地区 $430 \text{ km} \times 390 \text{ km}$ 范围内 107 个 GPS 水准点作为实验

数据,利用其中 67 个 GPS 水准点建立空间推估函数,40 个 GPS 水准点作为检查点。

图 1 给出了不同方法在检查点处的推估误差(当 $k=0$ 时,对应传统反距离加权法)。因检查点 38 和 40 不在已知点控制范围内,各种方法在这两个检查点处的推估精度都相对较低。传统反距离加权平均法在检查点 38 处误差为 6.1 m,一阶、二阶和三阶广义反距离加权推估在该点处的误差分别为 0.46 m、0.36 m 和 1.71 m。相对于传统方法,三种广义反距离推估模型都具有较高

的外推精度,二阶广义方法的外推精度最高。由 BIC 指标也可以得出二阶广义反距离加权推估模

型和三阶广义反距离加权推估模型明显优于一阶广义反距离加权推估模型的结论。

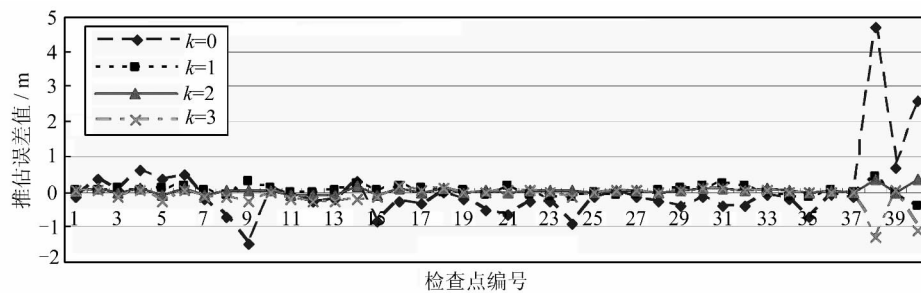


图1 不同方法在检查点处的推估误差

Fig. 1 Interpolation Errors from Different Methods at Checkpoints

图2给出了传统反距离加权方法(p 为一)和二阶广义反距离加权推估法所建立推估函数的空间曲线。

由图2(a)可得,传统反距离加权法给出的空间推估函数是以所有观测值平均化的水平平面为参考面,根据实测观测值与该平面的偏离情况进行“拖拉”调整构成的空间函数,且在已知点邻域内无线性信号。如图2(b)所示,二阶广义反距离加权法顾及了空间的线性趋势项和二次趋势项,较好地反映了空间函数曲线的空间变化趋势,即

推估模型在已知点处的线性趋势项和二次趋势项具有很好的全局一致性。相比于传统反距离加权平均方法,广义反距离空间推估函数曲线更为光滑,这在诸如大地水准面拟合推估、电离层延迟推估应用中具有一定潜力。在该算例中,由于空间推估半径达数百 km,且控制点的空间分布较为稀疏,当利用传统反距离加权平均法进行推估时,将趋势信号引起的推估误差归入平差随机模型进行处理是有条件的。关于这一点,可参考文献[15]给出的系统误差和随机误差相互转化的辩证关系。

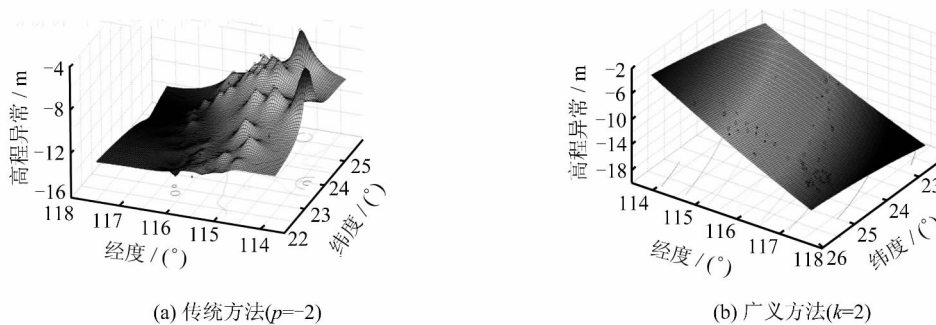


图2 传统方法与广义方法对比

Fig. 2 Traditional Method and Its Generalization

4 结 语

1) 传统反距离加权平均法的函数模型和随机模型相对简单,其空间推估函数在已知点邻域的泰勒级数展开无线性项,这导致该方法在复杂空间函数情形下具有较低的推估精度。

2) 广义反距离加权空间推估方法对传统反距离加权法的函数进行了改进,利用了每个实测点处的各阶偏导数估值信息,其随机模型利用了虚拟观测值的精度估计信息,即广义距离是基于空间推估函数偏导数估值的方差协方差阵构造的

概率测度。

3) 广义反距离加权法是传统反距离加权法的一种推广,因其通过实测值或先验模型求解空间函数的各阶偏导数而具有更高的空间推估精度。

4) 对于大范围空间推估问题,传统反距离加权平均很难抵偿空间函数趋势信号积累引起的推估误差。相比之下,广义反距离加权推估法较好地克服了传统方法在这方面的不足。

参 考 文 献

- [1] 李新,程国栋,卢玲,空间内插方法比较[J].地球科学进展,2000(3):260-265
- [2] 靳国栋,刘衍聪,牛文杰,距离加权反比插值法和

- 克里金插值法的比较[J]. 长春工业大学学报(自然科学版), 2003(3): 53-57
- [3] 颜辉武, 祝国瑞, 徐智勇. 基于动态 Voronoi 图的距离倒数加权法的改进研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2004(11): 1 017-1 020
- [4] Segobye M, 胡友健. 距离加权算法在大地球水准面差距内插中的应用[J]. 工程地球物理学报, 2006(6): 443-447
- [5] 宋小刚, 李德仁, 廖明生, 等. 基于 GPS 观测量的 InSAR 干涉图中对流层改正方法及其论证[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008(3): 233-236
- [6] 朱会义, 刘述林, 贾绍凤. 自然地理要素空间插值的几个问题[J]. 地理研究, 2004(4): 425-432
- [7] 宋小刚, 李德仁, 廖明生, 等. 引入变差函数的反距离加权法及应用研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2010(1): 83-87
- [8] 王潜心, 许国昌, 陈正阳. 利用区域 GPS 网进行高海拔流动站的对流层延迟量内插[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010(12): 1 405-1 408
- [9] 陈永奇, 吴子安, 吴中如. 变形监测分析与预报[M]. 北京:测绘出版社, 1988
- [10] Madsen K, Nielsen H B, Tingleff O. Methods for Non-linear Least Squares Problems[M]. Denmark: Technical University of Denmark, DTU, 2004
- [11] 赵生筱. 三项式定理及其三项式系数塔[J]. 数学通报, 2001(9): 32-33
- [12] Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model [J]. Annals of Statistics, 1978(6): 461-464
- [13] Cavanaugh J E. Unifying the Derivations for the Akaike and Corrected Akaike Information Criteria [J]. Statistics & Probability Letters, 1997, 33(2): 201-208
- [14] Zhong D. Robust Estimation and Optimal Selection of Polynomial Parameters for the Interpolation of GPS Geoid Heights[J]. Journal of Geodesy, 1997, 71(9): 552-561
- [15] 杨元喜. 卫星导航的不确定性、不确定度与精度若干注记[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 646-650

第一作者简介:薛树强,博士生,主要从事误差理论与测量平差研究。

E-mail: xuesq@casm. ac. cn

Generalized Inverse Distance Weighting Method for Spatial Interpolation

XUE Shuqiang^{1,2} YANG Yuanxi^{3,4}

(1 School of Geological and Surveying Engineering, Chang'an University,

126 Yanta Road, Xi'an 710054, China)

(2 Chinese Academy of Surveying and Mapping, 28 West Lianhuachi Road, Beijing 100830, China)

(3 National Key Laboratory for Geo-information Engineering, 1 Middle Yanta Road, Xi'an 710054, China)

(4 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an, 710054, China)

Abstract: We propose a generalized inverse distance weighting method after discussing the properties of the Taylor series expansion of the traditional inverse distance weighting function. Our generalized inverse distance weighting method is established by a set of virtual observation equations from the Taylor Series expansion of the spatial function. The probability measure, defined by the variance-covariance matrix, and the k -order partial derivatives estimation, is used to determine the weights for virtual observations. In order to optimally determine the parameter dimensions for the model, the criteria of BIC is introduced. The applicable conditions for the traditional inverse distance weighting average method are obtained from the first-order generalized inverse distance weighting average method. At last, the proposed generalized method is applied to a GPS leveling fitting problem to verify the proposed method.

Key words: spatial interpolation; inverse distance weighting; Taylor series; probability measure; GPS leveling fitting

About the first author: XUE Shuqiang, Ph D candidate, majors in error theory and adjustment.

E-mail: xuesq@casm. ac. cn