

# 利用自适应最小二乘配置的 GPS 水准与重力似大地水准面的拟合

郭春喜<sup>1</sup> 聂建亮<sup>1</sup> 王 斌<sup>1</sup> 蒋光伟<sup>1</sup>

(1 国家测绘地理信息局大地测量数据处理中心,西安市友谊东路 334 号,710054)

**摘 要:**针对 GPS 水准与重力似大地水准面之差中存在系统误差的问题,使用最小二乘配置估计信号大小,来提高似大地水准面的拟合精度。对于最小二乘配置的噪声与信号的协方差之间的关系不合理,采用自适应因子纠正两者之间的关系,并首次将自适应最小二乘配置算法应用于似大地水准面精化。最后使用我国东部面积将近 2 万 km<sup>2</sup> 的城市 A 的数据进行验证,计算结果表明,最小二乘配置及自适应最小二乘配置在一定程度上能够提高拟合效果,使似大地水准面更接近于真实值,实现了国内较大城市面积的 1.0 cm 检核精度的区域似大地水准面成果。

**关键词:**似大地水准面;最小二乘配置;方差分量估计  
中图法分类号:P228.41;P223.0

目前,区域似大地水准面精化一般采用高精度重力场模型、重力资料以及数值地面模型,获取该地区高分辨率重力异常值,综合考虑地形改正与地形均衡等因素影响,通过移去-恢复技术得到分辨率高、相对精度高、绝对精度低的重力似大地水准面;然后利用绝对精度高、分辨率低且分布均匀的 GPS 水准点完成对重力似大地水准面纠正。在精化过程中,一般将 GPS 水准与重力似大地水准面的差值作为拟含量,利用离散 GPS 水准点数据,采取合理有效的拟合模型逼近差值曲面,将其与重力似大地水准面叠加,最终得到该区域的似大地水准面模型。这样既能克服几何拟合方法的缺点,又能保留全部物理场信息<sup>[1]</sup>。因此,选取有效的拟合方法显得尤为重要。

针对地球重力场的长、中、短波分量的特点,刘振宇等分析了拟合曲面需要满足的数学条件<sup>[1]</sup>。由于重力场模型匹配以及重力资料缺乏等原因,致使区域重力似大地水准面存在一定的偏差;另外 GPS 水准数据采集与处理过程中,由于环境、模型、观测等因素影响,数据中可能存在某种系统误差,因此,在区域似大地水准面拟合过程中,选取合理有效的拟合方法是提高区域似大地水准面精度的一个关键因素。目前,大地测量的

数值拟合逼近问题已经取得了丰富的研究成果<sup>[2-11]</sup>。杨元喜等分析拟合逼近方法特性,并提出了两步拟合推估逼近算法<sup>[2-3]</sup>;杨元喜等采用自适应因子调整最小二乘配置中观测噪声与信号协方差矩阵之间关系,并将该方法成功应用于地图数字化<sup>[12]</sup>以及地壳形变监测领域<sup>[13]</sup>。因此,将自适应最小二乘配置应用于区域似大地水准面拟合中抑制信号影响是十分有意义的。

## 1 似大地水准面最小二乘配置解

将似大地水准面逼近模型的观测量分为固定参数效应和随机效应两部分。前者表示倾向性部分或称系统性部分,后者为随机性影响部分,因此,观测模型可表示为:

$$\Delta\zeta = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{S} + \Delta \quad (1)$$

式中,

$$\mathbf{A}_i = [1 \quad \lambda_i \quad \theta_i \quad \lambda_i\theta_i \quad \lambda_i^2 \quad \theta_i^2 \quad \dots] \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_i = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{i} \quad 0 \quad \dots] \quad (3)$$

$$(\Delta\zeta)_i = (\Delta\zeta_{\text{GPS}})_i - (\Delta\zeta_G)_i \quad (4)$$

式中, $\zeta_{\text{GPS}}$ 、 $\zeta_G$  表示  $n$  个 GPS/水准点对应的 GPS 水准与重力似大地水准面的数值; $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  表示倾向

性参数以及信号参数对应的系数矩阵,维数为  $n \times t_n$ 、 $n \times t_s$ ;  $\mathbf{A}$  为观测误差向量,维数为  $n \times 1$ ;  $\mathbf{X}$  为倾向性参数向量,维数为  $t_n \times 1$ ;  $\mathbf{S}$  为信号向量,维数为  $t_s \times 1$ ;  $(\theta_i, \lambda_i)$  为 GPS/水准点的坐标。

最小二乘估计值与信号估计值分别为<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}} &= (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_L^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_L^{-1} \Delta \zeta \\ \hat{\mathbf{S}} &= \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_L^{-1} (\Delta \zeta - \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}) \\ \hat{\mathbf{S}}' &= \boldsymbol{\Sigma}_{S'S} \boldsymbol{\Sigma}_S^{-1} \hat{\mathbf{S}}\end{aligned}\quad (5)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Sigma}_L = \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{B}^T + \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \quad (6)$$

式中,  $\boldsymbol{\Sigma}_{S'S}$  为已知点似大地水准面差与未知点似大地水准面差的互协方差矩阵;  $\boldsymbol{\Sigma}_\Delta$  为观测噪声的协方差矩阵;  $\boldsymbol{\Sigma}_S$  为信号的协方差矩阵。

在最小二乘配置中,关键问题是确定信号的方差-协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_S$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_{S'S'}$ 。通常这些协方差矩阵中的元素都是根据协方差函数计算得到。设残差  $\Delta_S = [\Delta_{S1}, \Delta_{S2}, \dots, \Delta_{Sn}]^T$ , 其数学期望、方差与协方差估计值分别为:

$$\mu_{\Delta_S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_{Si} \quad (7)$$

$$\sigma_{\Delta_S}(0) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_{Si} - \mu_{\Delta_S})^2 \quad (8)$$

$$\sigma_{\Delta_S}(\tau \neq 0) = \frac{1}{n_\tau - 1} \sum_{i=1}^{n_\tau} (\Delta_{Si} - \mu_{\Delta_S}) \cdot (\Delta_{S(i+\tau)} - \mu_{\Delta_S}) \quad (9)$$

式中,  $n_\tau$  为两点间的间隔为  $\tau$  的点数。根据方差  $\sigma_{\Delta_S}(0)$  和不同间隔的协方差  $\sigma_{\Delta_S}(\tau \neq 0)$ , 利用高

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{0\Delta}^{2(i)} \\ \hat{\sigma}_{0S}^{2(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n - 2\text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_\Delta) + \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_\Delta)^2 \\ \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_\Delta \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_S) \end{bmatrix}$$

式中,

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{B} + \mathbf{P}_S^i \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_\Delta &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{P}}_\Delta^i \mathbf{B} \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_S^i \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (14)$$

自适应因子为<sup>[15-16]</sup>:

$$\alpha = \frac{\hat{\sigma}_{0S}^{2(i)}}{\hat{\sigma}_{0\Delta}^{2(i)}} \quad (15)$$

则观测值的权矩阵为:

$$\hat{\mathbf{P}}_\Delta^i = \alpha \mathbf{P}_\Delta^i \quad (16)$$

依据新确定的观测向量和信号向量的权矩阵重新求解倾向参数和随机信号向量,直至  $\hat{\sigma}_{0\Delta}^{2(i)}$ 、 $\hat{\sigma}_{0S}^{2(i)}$  两者比值趋近于 1.0。

斯(Gauss)函数、希尔伏宁(Hirvonen)函数与似高斯函数等常用协方差函数进行拟合<sup>[14]</sup>。

## 2 似大地水准面自适应最小二乘配置解

最小二乘配置虽然在一定程度上能够削弱  $\Delta \zeta$  中有随机特性的趋势性影响,但观测噪声与信号的协方差矩阵一般依靠经验或者函数模型获取,可能造成两类协方差矩阵之间的关系不合理,这可以部分归结于方差因子不一致,最终导致似大地水准面的拟合精度偏低。针对该问题,采用杨元喜等提出的自适应最小二乘配置方法<sup>[12]</sup>,利用 Helmert 方差分量估计自适应地调整两似大地水准面差值的观测噪声和随机信号的方差比,进而控制信号对计算结果的影响。

设自适应最小二乘配置的目标函数为<sup>[15-16]</sup>:

$$\Omega = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{P}_\Delta \mathbf{V} + \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{P}_S \hat{\mathbf{S}} = \min \quad (10)$$

若两似大地水准面差值观测向量为等精度独立观测,初始单位权方差取为 1.0,则初次平差的先验权阵分别为:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\Delta^0 &= (\boldsymbol{\Sigma}_\Delta^0)^{-1} \\ \mathbf{P}_S^0 &= (\boldsymbol{\Sigma}_S^0)^{-1}\end{aligned}\quad (11)$$

第  $i$  次平差得到的改正数向量为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{S}} - \Delta \zeta \quad (12)$$

则观测噪声、信号的验后单位权方差  $\hat{\sigma}_{0\Delta}^{2(i)}$ 、 $\hat{\sigma}_{0S}^{2(i)}$  为:

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_\Delta \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_S) \\ n - 2\text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_S) + \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_S)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{P}_\Delta \mathbf{V} \\ \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{P}_S \hat{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 3 算例分析

为了比较分析拟合方法的特点,算例选取地势相对较平坦的东部城市 A 的数据进行了验证。城市 A 地势西高东低,由西南向东北倾斜,境内西北部和西南部系山丘陵区,东北部和东南部属平原地区,地表江河纵横,湖泊密布。城市 A 似大地水准面精化搜集了该区域及周边国家 GPS 连续运行参考站数据,采用高精度的数据处理软件、严密的数据处理技术方法获取高精度大地坐标系成果;采用一、二等水准布设方案,并考虑海潮负荷等因素影响,获取高精度水准成果。

本算例在计算重力似大地水准面过程中,考虑到地形改正与均衡改正,采用 Molodensky 公式及 EGM2008 参考重力场模型计算所需积分半径的区域重力似大地水准面。首先使用多项式法

对似大地水准面差值数据进行预处理,分析拟合残差,并结合该点对应的拟合数据离群情况,探测出两个 GPS 水准点为粗差点。最终算例选取 219 个 GPS 水准点参加计算,选取点位分布均匀的 189 个点进行拟合,30 个点进行外部检核,点位分布如图 1 所示。

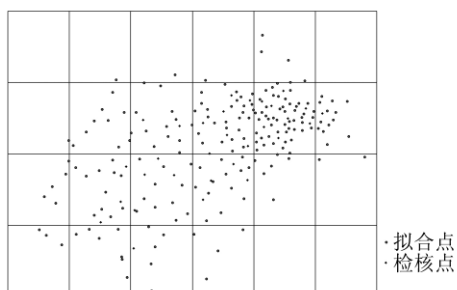


图 1 拟合点与检核点分布图

Fig. 1 Fitting Point and Checking Point

算例采用以下 3 种方案进行计算:① 三次多项式(POL);② 最小二乘配置(CO),协方差函数为似高斯函数;③ 自适应最小二乘配置(HCO),协方差函数为似高斯函数。

误差统计如表 1 所示,各方案外符合误差曲线绘于图 2。

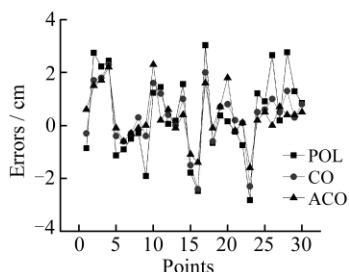


图 2 各方案检核点误差图

Fig. 2 Error of Checking Point

表 1 各方案误差统计结果/cm

Tab. 1 Result of Error

方案	拟合点精度	检核点精度
POL	1.6	1.6
CO	1.2	1.2
HCO	0.4	1.0

由计算结果可以看出:

1) 在充分利用该区域及周边的高等级 GPS 水准、重力资料基础上,进行地形改正与均衡改正,得到高精度的区域重力似大地水准面,利用最小二乘配置等拟合方法纠正重力似大地水准面,实现了 1.0 cm 外符合精度的较大城市面积的似大地水准面模型。

2) 与多项式方案相比,最小二乘配置与自适应最小二乘配置将观测量分为倾向部分以及随机

部分进行处理,有利于弱化数据中的信号影响,进而提高该区域似大地水准面的拟合精度。

3) 由图 2 可以看出,方案②与方案③的检核点都具有较好拟合精度,大部分检核点误差绝对值都在 1.5 cm 以内。方案③与方案②相比,拟合、检核精度有不同程度的提高,其原因是自适应最小二乘配置利用自适应因子实时地调整观测噪声与信号的协方差矩阵之间的比例,从而使两者对拟合结果的贡献更加合理,进一步提高了区域似大地水准面拟合的效果,实现了外符合精度 1.0 cm 的面积 2 万多 km<sup>2</sup> 的城市区域似大地水准面成果。

## 4 结 语

对于区域似大地水准面拟合,首先要得到高精度的区域重力似大地水准面,结合已有的 GPS 水准资料,采用移去-恢复法获得最终区域似大地水准面。在移去重力似大地水准面后,选取合理有效的拟合方法成为提高似大地水准面精化精度的关键因素。最小二乘配置能够较好地解决含有倾向性、随机性因素的问题,控制系统误差等因素影响,提高区域似大地水准面的拟合效果。而自适应最小二乘配置采用方差分量估计方法自适应地调整观测噪声与信号协方差的比例,使两者关系更接近真实值,从而得到更加可靠的差值曲面。最终将差值曲面与重力似大地水准面相叠加得到该区域似大地水准面模型。但上述两种拟合方法都容易受异常数据影响,导致拟合结果较差,因此,讨论不同拟合方法融合以及抗差自适应最小二乘配置在似大地水准面拟合中的应用问题是下一步的研究内容。

## 参 考 文 献

- [1] 刘振宇,高炳浩.基于 CQG2000 的吉林省西部地区似大地水准面的建立[J].测绘学报,2010,39(5):441-443
- [2] 杨元喜,刘念.重力异常的一种逼近方法[J].测绘学报,2001,30(3):192-196
- [3] 杨元喜,刘念.拟合推估两步极小解法[J].测绘学报,2002,31(3):192-195
- [4] 郭春喜,王惠民.多面函数和格网重力异常的拟合计算[J].测绘通报,1995(3):3-7
- [5] 匡翠林.高精度 GPS 水准算法研究及其应用[D].长沙:中南大学,2004
- [6] 张小红,程世来,许晓东.基于 Kriging 统计的 GPS 高程拟合方法研究[J].大地测量与地球动力学,

- 2007, 27(2):47-51
- [7] 沙月进. 最小二乘配置法在 GPS 高程拟合中的应用[J]. 测绘信息与工程, 2000(3):3-5
- [8] 刘念. 拟合推估的质量理论[D]. 郑州: 郑州信息工程大学, 2001
- [9] 李建成. 物理大地测量中的谱方法[D]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1993
- [10] 彭富清. 球冠谱分析在局部重力场研究中的应用[D]. 郑州: 郑州测绘学院, 1999
- [11] 邢锐, 王猛. 基于数学曲面法的 GPS 水准拟合的研究与实现[J]. 中国西部科技, 2009, 8(18):52-53
- [12] 杨元喜, 张菊清, 张亮. 基于方差分量估计的拟合推估及其在 GIS 误差纠正中的应用[J]. 测绘学报, 2008, 37(2):152-157
- [13] 赵丽华, 曾安敏. 自适应拟合推估在地壳形变分析中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2009, 29(1):132-134
- [14] 张菊清. 空间几何数据质量控制的理论与方法研究[D]. 西安: 长安大学, 2009
- [15] Yang Yuanxi, Zeng Anmin, Zhang Juqing. Adaptive Collocation with Application in Height System Transformation[J]. J Geod, 2009, doi: 10.1007/s00190-008-0226-9
- [16] 杨元喜, 曾安敏. 顾及几何观测信息和地球物理模型的形变参数自适应滤波解[J]. 中国科学(D 辑), 2009, 39(4):437-442
- 第一作者简介: 郭春喜, 高级工程师, 目前主要从事大地测量数据处理工作。  
E-mail: guochunxi1963@163.com

## The Fitting of GPS-Level and Gravity Quasigeoid Based on Adaptive Collocation

GUO Chunxi<sup>1</sup> NIE Jianliang<sup>1</sup> WANG Bin<sup>1</sup> JIANG Guangwei<sup>1</sup>

(1 Geodetic Data Processing Center, NASMG, 334 East Youyi Road, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** The efficient fitting way is the key to improve the accuracy of refining quasigeoid during the refinement. Collocation is used to control the influence of systematic errors in the paper for there are systematic errors in the difference between GPS/level and gravity quasigeoid. For covariance matrices of the signal vector and the observational noise are not harmonic in least square collocation, the covariance matrices are adaptively adjusted to approach the true with estimation of variance components in order to improve the accuracy of quasigeoid. An example of one eastern city with the area of 20 000 km<sup>2</sup> is given. It is shown that least square collocation and adaptive least square collocation can heighten the reliability of fitting, make the accuracy of quasigeoid higher and get the 1cm accuracy quasigeoid of large area in China.

**Key words:** quasigeoid; least square collocation; helmert estimation of variance components

**About the first author:** GUO Chunxi, senior engineer, majors in surveying data processing.

E-mail: guochunxi1963@163.com

### 《武汉大学学报·信息科学版》2012 年出版情况

《武汉大学学报·信息科学版》2012 年出版正刊 12 期, 出版字数 317 万; 发表论文 342 篇, 比上年增加 2.7%; 篇均页码 4.35 面。发表论文中, 基金资助论文 341 篇, 基金产文率 99.7%, 比上年提高 5.1 个百分点。发表论文按第一作者统计, 院士、博士生导师、长江学者、教授论文 70 篇, 占比 20.5%, 与上年基本持平; 副教授论文 39 篇, 占比 11.4%, 比上年略有下降; 博士、硕士生论文 186 篇, 占比 54.4%, 比上年略有下降; 其他论文 47 篇, 占比 13.7%, 比上年上升 4.4 个百分点。第一作者为副教授以上论文占比 31.9%, 与上年持平; 加上博士、博士生, 活跃作者占比 86.3%, 比上年减少了 4.4 个百分点。按第一作者来源统计, 校内稿件 126 篇, 占比 36.8%, 比上年增加 5 个百分点; 校外稿件 216 篇, 占比 63.2%, 比上年下降 5 个百分点。本年度涉及作者 1 171 人次, 其中校内 438 人次, 占 37.4%; 校外 724 人次, 占 61.8%; 国外 9 人次, 占 0.8%。本年度, EI 收录继续保持 100%。据中信所最新数据, 本刊 2011 年总被引频次 2 908, 影响因子 0.721。2013 年 1 月出版的邱均平《中国学术期刊综合影响研究报告》第三版, 继续将本刊列为测绘学科唯一的权威期刊。