

# 辅助纬度反解公式的 Hermite 插值法新解

李厚朴<sup>1</sup> 边少锋<sup>1,2</sup>

(1 海军工程大学导航工程系, 武汉市解放大道 717 号, 430033)

(2 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉市徐东路 340 号, 430077)

**摘要:**利用计算机代数系统, 推导出了地图投影中辅助纬度与大地纬度间的正反解变换公式, 发现和纠正了传统正解公式高阶项中的一些错误; 借助 Hermite 插值法得到了符号形式的反解表达式。将各辅助纬度展开式系数表示为简单的偏心率  $e$  的幂级数形式, 使得系数的表示形式更为统一。

**关键词:**辅助纬度; 地图投影; Hermite 插值法; 计算机代数系统

**中图法分类号:** P282

辅助纬度是指地图投影理论中的等距离纬度、等量纬度和等面积纬度, 它们都是大地纬度的函数。在地图制图中进行不同投影变换时, 经常要遇到这些量的反解变换。杨启和经过复杂的 Lagrange 级数展开, 给出了辅助纬度的直接展开式<sup>[1,2]</sup>, 但是由于历史条件的限制, 其间许多推导过程都由人工完成, 不仅级数展开式的次数不会很高, 而且展开式系数是原级数展开式的多项式形式, 不便于记忆, 计算也比较复杂。本文利用 Hermite 插值法<sup>[3]</sup>, 借助 Mathematica 计算机代数系统<sup>[3]</sup>推导出了符号形式的反解公式, 并将展开式系数表示为椭圆偏心率  $e$  的幂级数形式, 使用和记忆都比较方便。

## 1 等距离纬度、等量纬度和等面积纬度正解表示式

### 1.1 等距离纬度正解展开式

设椭球长半轴为  $a$ , 偏心率为  $e$ 。椭球面上由赤道至大地纬度  $B$  处的子午线弧长公式为<sup>[3]</sup>:

$$X = a(1 - e^2)(c_0 B + c_2 \sin 2B + c_4 \sin 4B + c_6 \sin 6B + c_8 \sin 8B) \quad (1)$$

设有一幅角为  $\varphi$ 、半径为  $R = a(1 - e^2)c_0$  的圆所对弧长与子午线弧长在量值上相等, 则  $\varphi$  一般被称为等距离纬度:

$$\varphi = \frac{X}{R} = \frac{X}{a(1 - e^2)c_0} = B + \alpha_1 \sin 2B + \beta_1 \sin 4B + \gamma_1 \sin 6B + \delta_1 \sin 8B \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{16}e^4 - \frac{111}{1\,024}e^6 - \frac{141}{2\,048}e^8 \\ \beta_1 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{15}{256}e^6 + \frac{405}{8\,192}e^8 \\ \gamma_1 = -\frac{35}{3\,072}e^6 - \frac{35}{2\,048}e^8 \\ \delta_1 = \frac{315}{131\,072}e^8 \end{cases} \quad (3)$$

### 1.2 等量纬度正解展开式

等量纬度  $q$  与大地纬度  $B$  的关系为<sup>[2]</sup>:

$$q = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{e/2} \right] \quad (4)$$

令  $e = 0$ , 相应的大地纬度变为球面纬度  $\varphi_1$ , 即

$$q = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \quad (5)$$

联立式(4)和式(5), 可解得:

$$\varphi_1 = 2 \arctan \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{e/2} \right] - \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

由于偏心率  $e$  很小, 因此可将式(6)展成  $e$  的幂级数形式。由于被展函数形式比较复杂, 且展开次数较高, 文献[2]人工推导的表达式中系数的高阶项有一些错误, 本文借助 Mathematica 重新进行了推导, 将等量纬度表示为类似于式(2)的形式:

$$\varphi_1 = B + a_1 \sin 2B + b_1 \sin 4B + c_1 \sin 6B + d_1 \sin 8B \quad (7)$$

式中的系数列于表1。

表1 文献[2]和本文推导的等量纬度展开式系数的比较

Tab.1 The Comparison of the Coefficients of Conformal Latitude Derived by Literature [2] and the Paper

文献[2]推导的系数	本文推导的系数
$a_1 = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{24}e^4 - \frac{3}{32}e^6 - \frac{1399}{53760}e^8$	$a_1 = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{24}e^4 - \frac{3}{32}e^6 - \frac{281}{5760}e^8$
$b_1 = \frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{689}{17920}e^8$	$b_1 = \frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{697}{11520}e^8$
$c_1 = -\frac{13}{480}e^6 - \frac{1363}{53760}e^8$	$c_1 = -\frac{13}{480}e^6 - \frac{461}{13440}e^8$
$d_1 = \frac{677}{107520}e^8$	$d_1 = \frac{1237}{161280}e^8$

1.3 等面积纬度正解展开式

旋转椭球面单位经差由赤道至纬度B所界曲边梯形面积为<sup>[4]</sup>:

$$F = a^2(1 - e^2) \left[ \frac{\sin B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4e} \ln \left( \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \right] \quad (8)$$

将  $B = 90^\circ$  代入可得  $F = a^2(1 - e^2) \left[ \frac{1}{2(1 - e^2)} + \frac{1}{4e} \ln \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \right]$ , 记  $A = \frac{1}{2(1 - e^2)} + \frac{1}{4e} \ln \left( \frac{1+e}{1-e} \right)$ , 设半径平方为  $R'^2 = a^2(1 - e^2)A$  的球面从赤道至纬度  $\varphi_2$  单位经差所界面积与F相

等,则称  $\varphi_2$  为等面积纬度。由球面积分公式得:  $R'^2 \sin \varphi_2 = F$ , 因此,

$$\varphi_2 = \arcsin \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\sin B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)} + \frac{1}{4e} \ln \left( \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \right) \right] \quad (9)$$

将式(9)展成偏心率e的幂级数形式,借助 Mathematica 求出各阶偏导数,整理后可得:

$$\varphi_2 = B + A_1 \sin 2B + B_1 \sin 4B + C_1 \sin 6B + D_1 \sin 8B \quad (10)$$

文献[2]经过繁琐级数展开后也近似得到式(10),只是系数略有不同,如表2所示。

表2 文献[2]和本文推导的等面积纬度展开式系数的比较

Tab.2 The Comparison of the Coefficients of Authalic Latitude Derived by Literature[2]

文献[2]推导的系数	本文推导的系数
$A_1 = -\frac{1}{3}e^2 - \frac{31}{180}e^4 - \frac{1243}{15120}e^6 + \frac{18563}{604800}e^8$	$A_1 = -\frac{1}{3}e^2 - \frac{31}{180}e^4 - \frac{59}{560}e^6 - \frac{42811}{604800}e^8$
$B_1 = \frac{17}{360}e^4 + \frac{113}{3780}e^6 + \frac{47963}{604800}e^8$	$B_1 = \frac{17}{360}e^4 + \frac{61}{1260}e^6 + \frac{76969}{1814400}e^8$
$C_1 = -\frac{173}{43560}e^6 - \frac{4207}{777600}e^8$	$C_1 = -\frac{383}{45360}e^6 - \frac{3347}{259200}e^8$
$D_1 = -\frac{2671}{10886400}e^8$	$D_1 = \frac{6007}{3628800}e^8$

2 等距离纬度、等量纬度和等面积纬度反解表示式

2.1 等距离纬度反解展开式

子午线弧长的微分公式为<sup>[3]</sup>:

$$dX = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB \quad (11)$$

将  $X=R\varphi$  代入并整理可得:

$$\frac{dB}{c_0 d\varphi} = (1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2} \quad (12)$$

考虑到式(12),根据三角级数回求公式,等距离纬度反解公式的形式为:

$$B = \varphi + \alpha_2 \sin 2\varphi + \beta_2 \sin 4\varphi +$$

$$\gamma_2 \sin 6\varphi + \delta_2 \sin 8\varphi \quad (13)$$

则有  $\varphi=0, B=0; \varphi=\frac{\pi}{2}, B=\frac{\pi}{2}$ 。由式(12)知:

$$B'(0) = c_0, B'(\frac{\pi}{2}) = c_0(1 - e^2)^{3/2} \quad (14)$$

对  $B'(\varphi)$  求导可得  $B''(\varphi)$ , 但它在  $\varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}$  处均为零,难以构成有效的插值条件,所以只能对  $B''(\varphi)$  继续求导得到  $B'''(\varphi)$ , 则有:

$$\begin{cases} B'''(0) = -3e^2 - \frac{27}{4}e^4 - \frac{729}{64}e^6 - \frac{4329}{256}e^8 \\ B'''(\frac{\pi}{2}) = 3e^2 - \frac{15}{4}e^4 + \frac{57}{64}e^6 + \frac{3}{256}e^8 \end{cases} \quad (15)$$

对式(13)两端求一阶、三阶导数,并联立导出的 4 个插值条件,得到如下用矩阵形式表示的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ -8 & -64 & -216 & -512 \\ 8 & -64 & 216 & -512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0) - 1 \\ B'(\frac{\pi}{2}) - 1 \\ B'''(0) \\ B'''(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

借助 Mathematica 可将上式展开为:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{213}{2\ 048}e^6 + \frac{255}{4\ 096}e^8 \\ \beta_2 = \frac{21}{256}e^4 + \frac{21}{256}e^6 + \frac{533}{8\ 192}e^8 \\ \gamma_2 = \frac{151}{6\ 144}e^6 + \frac{151}{4\ 096}e^8 \\ \delta_2 = \frac{1\ 097}{131\ 072}e^8 \end{cases} \quad (17)$$

### 2.2 等量纬度反解展开式

对式(5)求导可得

$$\frac{dq}{d\varphi_1} = \frac{1}{\cos\varphi_1} \quad (18)$$

联立式(4)经整理后得到:

$$\frac{dB}{d\varphi_1} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B}{(1 - e^2) \cos \varphi_1} \quad (19)$$

考虑到式(7),等量纬度反解公式的形式为:

$$B = \varphi_1 + a_2 \sin 2\varphi_1 + b_2 \sin 4\varphi_1 + c_2 \sin 6\varphi_1 + d_2 \sin 8\varphi_1 \quad (20)$$

则有  $\varphi_1 = 0, B = 0; \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{2}$ 。在 Mathematica 中展开式(19)可得:

$$B'(0) = 1 + e^2 + e^4 + e^6 + e^8$$

$B'(\frac{\pi}{2})$  值不存在。对  $B'(\varphi_1)$  继续求导可得

$B''(\varphi_1)$  和  $B'''(\varphi_1)$ , 它们在  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  处的值均不存在, 并且  $B''(0) = 0$ , 但  $B'''(0) = -4e^2 - 11e^4 - 21e^6 - 34e^8$  存在, 另外选择  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$  作为一个插值点。在式(7)中, 令  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ , 略去迭代过程, 可得:

$$B(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{40}e^6 - \frac{73}{2\ 016}e^8 \quad (21)$$

将式(21)代入式(19)展开得到:

$$B'(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{7}{12}e^4 - \frac{29}{60}e^6 - \frac{233}{3\ 360}e^8 \quad (22)$$

对式(20)两端求一阶、三阶导数,并联立导出的 4 个插值条件, 可得:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -8 & -64 & -216 & -512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0) - 1 \\ B(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} \\ B'(\frac{\pi}{4}) - 1 \\ B'''(0) \end{pmatrix} \quad (23)$$

借助 Mathematica 可将上式展开为:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8 \\ b_2 = \frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11\ 520}e^8 \\ c_2 = \frac{7}{120}e^6 + \frac{81}{1\ 120}e^8 \\ d_2 = \frac{4\ 279}{161\ 280}e^8 \end{cases} \quad (24)$$

### 2.3 等面积纬度反解展开式

对式(8)求导得  $\frac{dF}{dB} = \frac{a^2(1-e^2)\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}$ , 顾及

$$\frac{dF}{d\varphi_2} = a^2(1-e^2)A\cos\varphi_2, \text{ 可知:}$$

$$\frac{dB}{d\varphi_2} = \frac{A(1-e^2\sin^2 B)^2 \cos\varphi_2}{\cos B} \quad (25)$$

考虑到式(10),等面积纬度反解公式的形式为:

$$B = \varphi_2 + A_2 \sin 2\varphi_2 + B_2 \sin 4\varphi_2 + C_2 \sin 6\varphi_2 + D_2 \sin 8\varphi_2 \quad (26)$$

类似于 § 2.2 的分析,略去具体推导过程,得到:

$$\begin{cases} B'(0) = 1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8, \\ B'''(0) = -\frac{8}{3}e^2 - \frac{82}{15}e^4 - \frac{8\ 216}{945}e^6 - \frac{58\ 427}{4\ 725}e^8 \\ B(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}e^2 + \frac{31}{180}e^4 + \frac{139}{1\ 620}e^6 + \frac{289}{7\ 200}e^8 \\ B'(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{23}{90}e^4 - \frac{251}{945}e^6 - \frac{8\ 411}{45\ 360}e^8 \end{cases} \quad (27)$$

对式(26)式两端求一阶、三阶导数,并联立导出的 4 个插值条件, 可得:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -8 & -64 & -216 & -512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0) - 1 \\ B(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} \\ B'(\frac{\pi}{4}) - 1 \\ B'''(0) \end{pmatrix} \quad (28)$$

借助 Mathematica, 可将式(28)展开为:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \frac{1}{3}e^2 + \frac{31}{180}e^4 + \frac{517}{5\,040}e^6 + \frac{120\,389}{1\,814\,400}e^8 \\ B_2 = \frac{23}{360}e^4 + \frac{251}{3\,780}e^6 + \frac{102\,287}{1\,814\,400}e^8 \\ C_2 = \frac{761}{45\,360}e^6 + \frac{47\,561}{1\,814\,400}e^8 \\ D_2 = \frac{6\,059}{1\,209\,600}e^8 \end{array} \right. \quad (29)$$

### 3 结 论

本文建立了地图投影纬度变换数学模型,借助具有强大数学分析和符号计算能力的 Mathematica 系统推导出了辅助纬度与大地纬度代数间的正反解变换公式,得出以下结论。

1) 辅助纬度正反解由于椭圆偏心率影响,推导及其变换涉及较多复杂的数学分析, Mathematica 强大的数学分析功能为解决这类问题提

供了有力的帮助。

2) 发现和纠正了文献[2]给出的正解展开式高阶项的错误,并且给出了符号形式的反解表达式,使用起来非常方便。

### 参 考 文 献

- [1] 杨启和,杨晓梅. 测量和地图学中应用的三种纬度函数及其反解变换的线性插值方法[J]. 测绘学报, 1997, 26(1): 92-93
- [2] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 解放军出版社, 1989
- [3] 边少锋,许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004
- [4] 钟业勋,魏文展. 由子午线弧长和球面梯形面积反算纬度的方法[J]. 测绘工程, 2003, 12(4): 16-18

第一作者简介: 李厚朴, 博士生。主要从事大地测量、卫星导航的研究工作。

E-mail: lihoupu1985@126.com

## Derivation of Inverse Expansions for Auxiliary Latitudes by Hermite Interpolation Method

LI Houpu<sup>1</sup> BIAN Shaofeng<sup>1,2</sup>

(1 Department of Navigation, Naval University of Engineering, 717 Jiefang Road, Wuhan 430033, China)

(2 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 340 Xudong Road, Wuhan 430077, China)

**Abstract:** Both forward and inverse formulas between auxiliary and geodetic latitudes are derived with the help of computer algebra system in a comprehensive way; and also some mistakes that once were made in the high orders of previous forward formulas are pointed out and corrected. New symbolic expressions of the inverse expansions for these auxiliary latitudes are systematically given in virtue of Hermite interpolation. Their coefficients are expressed in a power series of the eccentricity  $e$ , which makes the expansions more uniform.

**Key words:** auxiliary latitudes; map projection; Hermite interpolation method; computer algebra system

**About the first author:** LI Houpu, Ph.D candidate, majors in geodesy and satellite navigation.

E-mail: lihoupu1985@126.com