

依比例符号、不依比例符号和半依比例符号数学定义的改进

黄 鹄¹ 钟业勋¹

(1 广西师范学院资源与环境科学学院, 南宁市明秀路 175 号, 530001)

摘要: 三维空间中的制图物体要投影到地球椭球面 S 上, 故存在三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射 $f: X \rightarrow S$; x 及其投影 $f(x)$ 的属性、尺寸、形状等特征, 被制图者认识和了解是对 x 进行地图表示的前提, 故存在椭球面 S 到主体认识结构 Y 的映射 $g: S \rightarrow Y$ 。 x 的观念模型 $gf(x)$ 可以表示在二维平面 Z 上, 故 Y 与 Z 间必然存在映射 $q: Y \rightarrow Z$ 。 根据非退化区间为等势集合的定理, 知 f, g, q 为双一一函数, 从而使 $x, f(x), gf(x)$ 与 $qgf(x)$ 一一对应。 而 $f(x)$ 与 $qgf(x)$ 是否与地图比例尺 $1: M$ 相关、无关或半相关, 决定着地图符号 $qgf(x)$ 为依比例符号、不依比例符号或半依比例符号的归属。 这三类地图符号相互转化及条件, 证明了事物由量变到质变的辩证规律。

关键词: 制图物体; 映射; 依比例符号; 不依比例符号; 半依比例符号
中图法分类号: P283.1; P28

地图符号按比例关系分为依比例符号、不依比例符号和半依比例符号 3 大类^[1-3]。 文献[4]分别给出了这 3 类地图符号的数学定义。 然而, 该定义是在点集内部、外部、轨道、极限圆、半依比例符号特征点等概念的基础上导出的。 笔者研究后发现, 根据制图物体在地面(地球椭球面)上的投影与地图符号之间是否与地图比例尺相关、无关或部分相关条件, 便可对这 3 个定义进行简洁表述。 本文是笔者对依比例符号、不依比例符号和半依比例符号数学定义的改进。

1 地图符号与图对象之间的关系

设 X 为三维空间, $A \subset X$ 为制图区域, $x \in A \subset X$ 为制图区域中的制图对象。 由于制图过程必须将三维空间 X 中的事物先投影到地球椭球面 S 上, 故存在 X 到 S 的映射 $f: X \rightarrow S$ 。 $x \in A \subset X$ 及其在椭球面上的投影 $f(x) \in f(A) \subset S$ 的性质、大小、形状等特征, 必须被制图者认识和了解, 才能对其进行地图表示, 因此, 存在 S 到主体认识结构 Y 的映射 $g: S \rightarrow Y$, $gf(x) \in gf(A) \subset Y$ 便

是制图主体了解的关于 x 和 $f(x)$ 的相关知识, 它是看不见摸不着的观念形态, 这种隐形信息可以用语言文字表述或以地图符号表示。 由于隐形信息可以变换为可视化信息, 因此, 存在主体认识结构 Y 到二维平面 Z 的映射 $q: Y \rightarrow Z$ 。 x 在 f, g, q 复合映射下的平面象 $qgf(x) \in qgf(A) \subset Z$ 便是其相应的地图符号。

由于 A 为有限闭区间, $f(A), gf(A)$ 和 $qgf(A)$ 也都是有限闭区间, 即非退化区间。 由于任何非退化区间都具有连续统的势, 所以 $A, f(A), gf(A)$ 和 $qgf(A)$ 为等势集合, 即

$$A \sim f(A) \sim gf(A) \sim qgf(A) \quad (1)$$

等势集合之间存在着双一一函数^[5], 故知 f, g, q 为双一一函数, 即 $x \in A \subset X$ 与 $f(x) \in f(A) \subset S$, $gf(x) \in gf(A) \subset Y$, $qgf(x) \in qgf(A) \subset Z$ 是一一对应的。 事实上, 地图符号是制图物体 x 在一定专题、一定比例尺条件下的映射^[6]。 专题关联着 x 的属性特征。 $f(x)$ 经 g, q 复合变换为地图符号 $qgf(x)$ 后, $f(x)$ 与 $qgf(x)$ 之间与地图比例尺 $1: M$ 相关、无关或部分相关, 则决定 $qgf(x)$ 为依比例符号、不依比例符号或半依比例符号的

性质。

2 依比例符号、不依比例符号和半依比例符号的数学定义

定义 1 设 $x \in A$ 为制图区域 A 中的制图物体, A 为三维空间 X 的子集, $A \subset X$ 。存在三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射 $f: X \rightarrow S$ 和 S 到主体认识结构 Y 的映射 $g: S \rightarrow Y$, 以及 Y 到二维平面 Z 的映射: $q: Y \rightarrow Z$ 。地图比例尺为 $1: M$ 。 $x \in A \in X$ 在椭球面上的映射为 $f(x) \in f(A) \in S$, 在二维平面上的复合映射为 $qgf(x) \in qgf(A) \in Z$, $qgf(x)$ 即为 x 的地图符号。如果 x 在椭球面上的映象 $f(x)$ 与地图符号 $qgf(x)$ 的关系满足:

$$M^2 qgf(x) = f(x) \quad (2)$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的依比例符号; 满足:

$$M^2 qgf(x) > f(x) \quad (3)$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的不依比例符号; 满足:

$$\forall P \in qgf(x), \exists P_\alpha, P_{\alpha'} \in qgf(x), \alpha \in [0^\circ, 360^\circ], \alpha' = \alpha + 90^\circ, \text{ 使得}$$

$$MP_\alpha = (qg)^{-1}(P_\alpha) \wedge MP_{\alpha'} > (qg)^{-1}(P_{\alpha'}) \quad (4)$$

则称 $qgf(x)$ 为 x 的半依比例符号, 其中 α 为依比例方向而 α' 为不依比例方向。

图 1 为地图符号 $qgf(x)$ 按比例尺 $1: M$ 放大后的边界与制图物体 x 在椭球面上的投影 $f(x)$ 的边界关系。从图 1 可见, 依比例符号按比例尺放大后, 与制图物体 x 在椭球面上的投影 $f(x)$ 的边界重合, 故满足 $M^2 qgf(x) = f(x)$ 为其共同特征。对不依比例符号, 若按比例尺 $1: M$ 放大后, 其面积恒大于制图物体在椭球面上的投影面积, 即满足不等式 $M^2 qgf(x) > f(x)$ 。这种面积的差异依符号的种类及比例尺不同而千差万别。这种不规则性的差异使比例尺意义不复存在, 只保留其指代事物的概念意义、属性特征、数量等级等作用, 故名为不依比例符号。若 $qgf(x)$ 为半依比例符号, 对于 $P \in qgf(x)$ 的任意点, 均存在两个比例性质不同而且相互垂直的方向 α 和 α' , 当 P_α 为依比例方向时, $P_{\alpha'}$ 则为不依比例方向。对于不依比例方向, 必定满足 $MP_{\alpha'} > (qg)^{-1}(P_{\alpha'})$ 不等式, 且这种差异随符号的种类不同及比例尺不同而千差万别。也是这种不规则性差异的存在, 使这一方向失去比例意义, 故为不依比例方向。

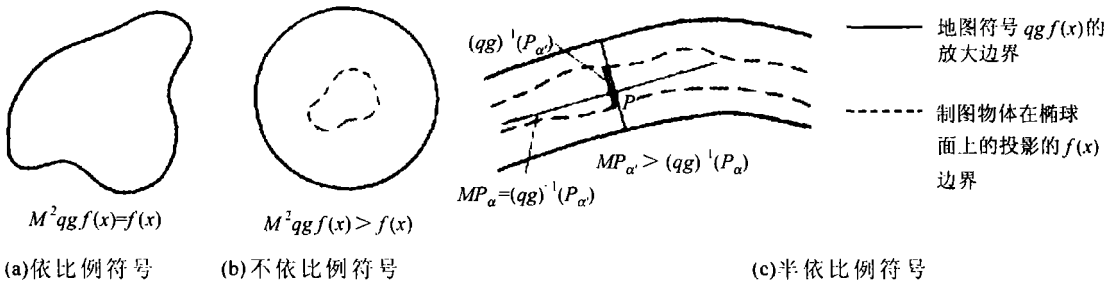


图 1 地图符号 $qgf(x)$ 的放大边界与制图物体在椭球面的投影 $f(x)$ 关系图

Fig. 1 Enlarge Boundary of Map Symbol $qgf(x)$ and Project of the Mapping Substanc on the Surface of Earth-ellipsoid

3 地图符号比例性质的转化

3.1 依比例符号与不依比例符号的转化

为使地图符号满足易读性的要求, 它的大小不能小于某一限度。文献[4]把 1 mm 直径的圆确定为能绘制和辨别的下限, 称为极限圆。考虑到地图品种和用途的多样性、使用环境的复杂性, 这里以阈值 K 取代极限圆。 K 值可依不同情况作适当调整。

$f(x)$ 是 x 在椭球面(地面)上的投影, 其对应的地图符号 $qgf(x)$ 的面积与比例尺分母 M 的平方成反比, 而 $qgf(x)$ 的一维线素的长度与 M 成

反比。令

$$K = f(x)/M_k^2 \quad (5)$$

称 M_k 为地图符号的临界比例尺分母。当 $M \leq M_k$ 时, $qgf(x)$ 为依比例符号; 当 $M > M_k$ 时, $qgf(x)$ 为不依比例符号。

3.2 半依比例符号向依比例符号的转化

设条带状地物 x 在地面上的投影 $f(x)$ 的最小宽度为 l_{\min} , $l_{\min} \in f(x)$, K 为地图上能依比例描绘的阈值。令

$$K = l_{\min}/M_k \quad (6)$$

称 M_k 为半依比例符号转化为依比例符号的临界比例尺分母。当 $M \leq M_k$ 时, $qgf(x)$ 为依比例符号; 当 $M > M_k$ 时, $qgf(x)$ 为半依比例符号。

由于半依比例符号虽会随比例尺的缩小而缩短长度,但一般仍保持其半依比例性质。当长度过小时往往被舍弃,这时实际上已融为背景符号而改变了其本身的性质。

4 结 语

地图符号是三维空间中的物体 x 经 f 、 g 、 q 三重复合映射的映象。 $f(x)$ 及 $qgf(x)$ 与地图比例尺相关、无关或部分相关,决定了地图符号属依比例符号、不依比例符号或半依比例符号。根据这一思想,本文对文献[4]中这三种地图符号的数学定义进行了改进。改进后的定义使三种符号具有共同的推导前提,而彼此的差异仅仅表现为各自满足的条件有所不同。新定义省略了原定义中如点集的内部、外部、轨道、不依比例符号特征点、半依比例符号定位线等多个预备性概念,使定义的表述更为简洁。不依比例符号、半依比例符号向依比例符号转化的条件,揭示了不同性质符

号之间的内在联系和事物由量变到质变的辩证规律。

参 考 文 献

- [1] 祝国瑞,尹贡白. 普通地图编制(上册)[M]. 北京:测绘出版社,1982: 43
- [2] 尹贡白,王家耀,田德森,等. 地图概论[M]. 北京:测绘出版社,1991: 59
- [3] 田德森. 现代地图学[M]. 北京:测绘出版社,1991: 24
- [4] 钟业勋,魏文展,彭月英,等. 地图符号数学定义的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2001,26(5): 465-468
- [5] 李孝传,陈玉清. 一般拓扑学引导[M]. 北京:高等教育出版社,1982
- [6] 钟业勋,李占元. 地图数学定义的研究[J]. 武汉测绘科技大学学报,1997,22(2): 132-135

第一作者简介:黄鹄,副教授,博士生。研究方向为环境地理信息系统、地图学与地理信息系统。

E-mail: m.rhuanghu@yahoo.com.cn

Improving the Mathematical Definition of Scale Symbol, Non-scale Symbol and Semi-scale Symbol in the Map

HUANG Hu¹ ZHONG Yexun¹

(1 School of Resources and Environment Science, Guangxi Normal University, 175 Mingxiu Road, Nanning 530001, China)

Abstract: The mapping objects in the three-dimensional space need being projected on S surface of earth-ellipsoid, so there is the mapping $f: X \rightarrow S$ from three-dimensional space X to the S surface of earth-ellipsoid. It is the premise of showing x on map for the attribute, measurement, shape, etc. characters of x and its mapping $f(x)$ on S are known and understood by the cartographer, so there is the mapping $g: S \rightarrow Y$ from the S surface of earth-ellipsoid to the body cognition construction Y . The idea model of x in Y $gf(x)$ may show on two-dimensional plane Z , so there is the mapping $q: Y \rightarrow Z$ from the body idea construction Y to the two-dimensional plane Z . According to the theorem non-deteriorate inter-regional belonging to the equipollence set, we know that the f , g , q are bijective, this makes x , $f(x)$, $gf(x)$ and $qgf(x)$ corresponding one to one. It decides the map symbol $qgf(x)$ belonging to the scale symbol or non-scale symbol or semi-scale symbol respectively for the $f(x)$ and $qgf(x)$ with the map scale $1: M$ are related, aren't related or semi-related.

Key words: mapping substance; mapping; scale symbol; non-scale symbol; semi-scale symbol

About the first author: HUANG Hu, associate professor, Ph. D candidate, majors in environmental GIS, GIS and cartography.

E-mail: m.rhuanghu@yahoo.com.cn