DOI:10.13203/j.whugis2004.09.002
第29卷 第9期 武 汉 大 学 学 报 · 信 息 科 学 版 Vol. 29 No. 9
2004年9月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Sept. 2004

文章编号: 1671-8860(2004)09-0757-06 文献标识码: A

一个新的 GNSS 模糊度估计类

P. J. G. Teunissen[1]

(1 荷兰代尔夫特理工大学航空航天工程学院对地观测与空间技术系, 荷兰代尔夫特)

摘 要: 介绍了一类新的 GNSS 模糊度估计。因为该类遵循移去-恢复原理, 称之为整数等变估计类。本文将说明整数等变估计类较整数估计类和线性无偏估计类的范围要大, 同时给出一个相当有用的整数等变估计类的表达式。这个表达式揭示了整数等变估计类的结构, 并显示该表达式如何在浮点解的基础上实现整数等变估计。最后还提出最优整数估计。

关键词: GNSS 模糊度解; 整数等变估计; 最优整数估计
中图法分类号: P228.42

当前用于测量、定位和导航的 GPS 模型众多[1~6], 其应用目的各异, 但无论是单基线动态定位, 还是用于地球动力学研究的多基线静态定位, 或者是其他目的的定位, 只要是涉及到模糊度解时, 其本质基本上是一致的。这种基于模糊度解的 GNSS (global navigation satellite systems) 模型从概念上可以归纳为下列线性(化)观测方程:

$$E\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{y}$ 是 m 维 GNSS 观测值向量; $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别为 n 维和 p 维的待估参数向量; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望; $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为相应的设计矩阵。$\boldsymbol{y}$ 通常包括所有观测历元的单(或双)频、双差载波相位或伪距观测值减计算值; $\boldsymbol{a}$ 表示模糊度参数, 单位为周, $\boldsymbol{a} \in Z^n$; $\boldsymbol{b}$ 表示其他待估参数, 可能是基线向量(坐标), 也可能是对流层、电离层延迟, 也可能兼而有之, $\boldsymbol{b} \in R^p$。

求解 GNSS 模型(1)的过程可以分成三步[7,8]。

1) 首先不管 $\boldsymbol{a} \in Z^n$ 的限制, 直接采用标准的参数估计得到 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的实数解(或称作浮点解) $[\hat{\boldsymbol{a}}\ \hat{\boldsymbol{b}}]^{\mathrm{T}}$ 以及它们的方差-协方差矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\hat{a}} & \boldsymbol{Q}_{\hat{a}\hat{b}} \\ \boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{a}} & \boldsymbol{Q}_{\hat{b}} \end{bmatrix}$。

2) 利用模糊度实数解 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 计算相应的模糊度整数解。这就意味着要引进一个从 n 维空间实数解到 n 维空间整数解的映射 $S: R^n \to Z^n$, 使得:

$$\check{\boldsymbol{a}} = S(\hat{\boldsymbol{a}}) \tag{2}$$

3) 将整数解代入下列方程, 获得待估参数 $\boldsymbol{b}$ 的固定解:

$$\check{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{b}} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{a}} - \check{\boldsymbol{a}}) \tag{3}$$

从式(3)可知, 模糊度残差 $(\hat{\boldsymbol{a}} - \check{\boldsymbol{a}})$ 在这里被用来改正浮点解, 从而获得固定解。

本文将重点研究步骤 2), 并考虑选择不同的映射 S。

1 整数估计类

已知很多从实数向量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 到整数向量 $\check{\boldsymbol{a}}$ 的计算方法, 每一个方法均对应一个从 n 维实数空间到 n 维整数空间的映射 $S: R^n \to Z^n$。一旦这个映射定义好了, 其整数向量就可以表示为 $\check{\boldsymbol{a}} = S(\hat{\boldsymbol{a}})$。因 Z^n 的离散性, 映射 S 是多对一的关系。这就意味着不同的实数模糊度向量可能映射到相同的整数向量。这里对每个整数向量 $\boldsymbol{z} \in Z^n$ 和子集 $S_z \subset R^n$, 可以写作:

$$S_z = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \boldsymbol{z} = S(\boldsymbol{x})\},\ \boldsymbol{z} \in Z^n \tag{4}$$

子集 S_z 包含所有实数模糊度向量, 通过 S 映射到相同的整数向量 $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \in Z^n$。这个子集称作 $\boldsymbol{z}$ 的归属域(pull-in region), 在这个归属域里, 所有模糊度实数解均归于相同的模糊度固定解。

定义好了归属域, 就可以给出相应的整数模糊度估计的显式:

$$\check{\boldsymbol{a}} = \sum_{z \in Z^n} \boldsymbol{z} S_z(\hat{\boldsymbol{a}}) \tag{5}$$

式中,

收稿日期: 2004-03-05。

$$S_z(\hat{a}) = \begin{cases} 1, \hat{a} \in S_z \\ 0, 其他 \end{cases}$$

既然这个归属域已经完全定义了整数估计，人们完全可以通过列举归属域的特性来定义一类整数估计。下面介绍归属域的3个合理的特性。

1）所有归属域的并集应该完全覆盖n维空间：

$$\bigcup_{z \in Z^n} S_z = R^n \tag{6}$$

否则，n维空间可能有空隙，就不能保证每一个$\hat{a} \in R^n$能够对应一个整数模糊度向量。

2）要求两个明显不同的归属域不能有交叉，否则就不能保证一个浮点解$\hat{a} \in R^n$能够独一无二地对应一个整数向量。对于两个归属域内的点，要求

$$S_{z_1} \cap S_{z_2} \neq 0, \ \forall z_1, z_2 \in Z^n, z_1 \neq z_2 \tag{7}$$

但容许不同归属域共享部分相同的边缘。也就是说，如果$\hat{a}$落在边缘上的概率为零是可以容许的。实际上，当$\hat{a}$的概率密度函数（pdf）连续时，就是这种情况。

3）整数映射S必须满足$S(x+z)=S(x)+z, \forall x \in R^n, z \in Z^n$。该特性同样非常合理，它表明当浮点解被某一整数$z$平移时，相应的整数解也将被相同的整数平移。这个特性允许使用整数移去-恢复技术：$S(\hat{a}-z)+z=S(\hat{a})$，进而只需处理$\hat{a}$的小数部分，而不是所有的部分，因为这个数值往往比较大。

整数移去-恢复特性意味着$S_{z_1+z_2}=\{x \in R^n | z_1+z_2=S(x)\}=\{x \in R^n | z_1=S(x)-z_2=S(x-z_2)\}=\{x \in R^n | z_1=S(y), x=y+z_2\}=S_{z_1}+z_2, \forall z_1, z_2 \in Z^n$。这样归属域可以相互转化，因此第三特征也可以表示为：

$$S_z = z + S_0, \ \forall z \in Z^n \tag{8}$$

式中，S_0为Z^n的初始归属域。

所有符合上述三个特性的整数模糊度估计均归结于可容许整数模糊度估计类。

定义1 可容许整数模糊度估计（admissible integer estimators）。整数估计$\breve{a}=\sum_{z \in Z^n} z S_z(\hat{a})$是可容许的，如果① $\bigcup_{z \in Z^n} S_z = R^n$；② $S_{z_1} \cap S_{z_2}=0, \forall z_1, z_2 \in Z^n, z_1 \neq z_2$；③ $S_z = z+S_0, \forall z \in Z^n$，当然存在不同的整数估计属于该类。

如定义1，构建可容许估计的方法是选择一个子集S_0，使其在R^n空间无覆盖、无交叉地相互转换。如在二维空间中，S_0可以选在单位正方形的中心。

2 整数估计类的典型成员

在GNSS模糊度解决方案中，经常使用的3个可容许整数估计有直接归整、间接归整和整数最小二乘估计。

2.1 直接归整

最简单的从实数到整数的计算方法为直接将其归整到最近的整数，相应的整数估计可以表示为：

$$\breve{a}_R = ([\hat{a}_1], \cdots, [\hat{a}_n])^T \tag{9}$$

式中，[◦] 表示归整到最近的整数。直接归整估计显然是容许的。除了中间值，任何其他$\hat{a} \in R^n$的浮点解均将映射到对应的整数解，这显然满足前两个特性。第三个特性也符合，因为其满足整数移去-恢复原理，即$[x-z]+z=[x], \forall x \in R, z \in Z$。

具体到某一个向量分量上时，直接归整表示每一个实数模糊度$\hat{a}_i (i=1, \cdots, n)$归整到与其本身最近的整数，两者之间的差距的绝对值最大为0.5。直接归整的归属域为：

$$S_{R,z} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in R^n \,\|\, x_i - z_i | \leqslant \frac{1}{2}\}, \ \forall z \in Z^n \tag{10}$$

实际上，这是一个边长为1、中心为$z \in Z^n$的n方体。

2.2 间接归整（或自助法归整）

间接归整法（或步营法）可以看作是直接归整的广义形式。该法在考虑模糊度之间的相关的前提下利用直接归整。间接归整遵循序贯条件最小二乘法，其步骤如下。

1）假设有n个模糊度浮点解，首先从第一个模糊度$\hat{a}_1$开始，直接将其归整到最近的整数；

2）获得第一个整数模糊度后，其他的$n-1$个实数模糊度根据其与第一个模糊度的相关关系进行修正，得到一组新的实数模糊度，然后再对第二个模糊度$\hat{a}_{2|1}$（已修正的）直接归整；

3）同样地，获得第二个整数模糊度后，其他的$n-2$个实数模糊度根据其与第二个模糊度的相关关系再次修正，重新获得一组新的实数模糊度；

4）重复上述过程，直到完成所有模糊度归整。

间接归整估计$\breve{a}_B$的向量分量表达式为：

$$\breve{a}_{B,1} = [\hat{a}_1]$$

$$\breve{a}_{B,2} = [\hat{a}_{2|1}] = [\hat{a}_2 - \sigma_{\hat{a}_2 \hat{a}_1} \sigma_{\hat{a}_1}^{-2} (\hat{a}_1 - \breve{a}_{B,1})]$$

…

$$\check{a}_{B,n}=[\hat{a}_{n|N}]=[\hat{a}_n-\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{\hat{a}_n\hat{a}_{i|I}}\sigma_{\hat{a}_{i|I}}^{-2}(\hat{a}_{i|I}-\check{a}_{B,i})] \tag{11}$$

式中，$\hat{a}_{i|I}$表示通过先前 $I=\{1,\cdots,i-1\}$序贯归整后的第 i 个修正实数解。

间接归整估计也是可容许的。除了中间值，任何其他的浮点解均将映射到对应的独一无二的整数解，显然满足首先的两个条件，同时也满足整数移去-恢复原理。因为，如果设 $\check{a}'_B$为对应于 $\hat{a}'=\hat{a}-z$ 的间接归整估计值，从式（11）很容易得出 $\check{a}_B=\check{a}'_B+z$。

实际上也可以通过对模糊度的方差协方差进行三角分解，获得模糊度的实数条件序贯平差解。设方差-协方差矩阵的 $\boldsymbol{LDU}$ 分解形式为 $\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$分别为单位下和上三角矩阵，$\boldsymbol{D}$为对角矩阵，这样（$\hat{a}-z$）$=\boldsymbol{L}$（$\hat{a}^c-z$）。其中，$\hat{a}^c$表示通过先前序贯归整后的修正实数解，$\hat{a}^c$ 的方差协方差由对角矩阵$\boldsymbol{D}$ 给出。这表明，在向量分量上对 $\hat{a}^c$ 直接归整，获得的整数解 z 实际上就是间接归整估计 $\check{a}_B$、$\check{a}_B$ 满足$[\boldsymbol{L}^{-1}(\hat{a}-\check{a}_B)]=0$。如果让 c_i 表示一个在第 i 个分量上为 1、其余分量为 0 的标准单位向量 $c_i=[0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，$S_{B,z}$为属于间接归整估计的归属域：

$$S_{B,z}=\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in R^n \mid |c_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}(x-z)|\leqslant\frac{1}{2}\},\quad \forall z\in Z^n \tag{12}$$

当 $\boldsymbol{L}$ 为对角矩阵时，上式就变成了式（10），即当模糊度方差-协方差矩阵为对角矩阵时，直接归整估计 $\check{a}_R$ 和间接归整估计 $\check{a}_B$ 是一致的。

2.3　整数最小二乘

整数最小二乘估计可以定义为：

$$\check{a}_{\mathrm{ILS}}=\arg\min_{z\in Z^n}\|\hat{a}-z\|^2_{Q_{\hat{a}}} \tag{13}$$

式中，$\|\cdot\|^2_{Q_{\hat{a}}}=(\cdot)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1}(\cdot)$，文献[7] 第一次提出该法。整数最小二乘估计也是容许的。除了边值，任何其他 $\hat{a}\in R^n$ 的浮点解均将映射到对应的整数解，显然满足前两个条件。又因为对于任何 u，$\hat{a}_{\mathrm{ILS}}=\arg\min_{z\in Z^n}\|\hat{a}-u-z\|^2_{Q_{\hat{a}}}+u$ 成立，因此，这也满足整数移去-恢复原理。

式（13）表明，那些映射到某一相同整数向量 $\check{a}_{\mathrm{ILS}}$的浮点解（$\hat{a}\in R^n$），与整数 $\check{a}_{\mathrm{ILS}}$的距离要比其他整数（$z\in Z^n$）更近。整数最小二乘估计的归属域 $S_{\mathrm{ILS},z}$包含一些半空间的交叉，每一个半空间的边缘都由正交于（$c-z$），$c\in Z^n$，并通过中点（$z+c$）/2 的平面组成。这个正交空间由模糊度的方差-协方差定义。当（$\hat{a}-z$）正交映射到（$c-z$）的长度小于或等于 c 与 z 之间的距离时，有：

$$S_{\mathrm{ILS},z}=\bigcap_{c\in Z^n}\{x\in R^n \mid |w_c(x)|\leqslant\frac{1}{2}\|c\|_{Q_{\hat{a}}}\},\quad\forall z\in Z^n \tag{14}$$

式中，
$$w_c(x)=\frac{c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1}(x-z)}{\sqrt{c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1}c}}$$

注意到式（14）中的（$c-z$）已经置换为 c，因此，空间交叉允许由所有 $c\in Z^n$ 组成。

从 $\check{a}_R$ 和 $\check{a}_B$ 的比较中知道，当单位三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 减为单位矩阵时，两者是相同的，同样的情况下，对于整数最小二乘估计 $\check{a}_{\mathrm{ILS}}$也成立。也就是说，当模糊度的方差-协方差为对角矩阵时，三种估计是相同的。当单位三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的所有元素为整数时，$\check{a}_B$ 和 $\check{a}_{\mathrm{ILS}}$是相同的。

3　整数等变估计类

本节提出一个新的估计类，该类要比以前定义的估计类大。为了使该类估计足够广义，考虑该类估计能够解决 GNSS 模型（1）中包括实数和整数两类参数的任意线性函数组合 θ 的估计问题：

$$\theta=\boldsymbol{l}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l}_a\in R^n,\ \boldsymbol{l}_b\in R^p \tag{15}$$

这样，当 $l_b=0$ 时，仅解决模糊度的线性函数的估计问题；当 $l_a=0$ 时，仅估计基线分量的线性函数；当 $l_a\neq0$，$l_b\neq0$ 时，同时估计模糊度和基线分量的线性函数。

对于新的估计类，笔者认为应至少保留整数移去-恢复原理。如在 GNSS 模型中估计模糊度向量时，如果载波相位增加任意一个整数，其整周模糊度解也应该平移相同的整数。这个原理应用到 θ 的估计时意味着：当增加 $\boldsymbol{A}z$ 到 y 时（z 为任意值，$z\in Z^n$），一定会引起 $\boldsymbol{l}_a^{\mathrm{T}}z$ 的平移；同理，当增加 $\boldsymbol{B}\zeta$ 到 y 时（ζ 为任意值，$\zeta\in R^p$），一定会引起 $\boldsymbol{l}_b^{\mathrm{T}}\zeta$ 的平移。将满足上述条件的 θ 的估计称作整数等变估计。

定义 2　整数等变估计（integer equivariant estimators）。函数 $f_\theta:R^m\rightarrow R$，$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}}=f_\theta(y)$是 $\theta=\boldsymbol{l}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 的整数等变估计，如果

$$\begin{cases} f_\theta(y+\boldsymbol{A}z)=f_\theta(y)+\boldsymbol{l}_a^{\mathrm{T}}z, & \forall y\in R^m, z\in Z^n \\ f_\theta(y+\boldsymbol{B}\zeta)=f_\theta(y)+\boldsymbol{l}_b^{\mathrm{T}}\zeta, & \forall y\in R^m, \zeta\in R^p \end{cases} \tag{16}$$

并不难证明先前讨论的整数估计类具有整数等变性。简单的检核可知，$\check{\theta}=\boldsymbol{l}_a^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{l}_b^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{b}}$符合上述两个条件，反之，就不一定成立，这是因为 IE 估计类较

其他整数估计类要大。

IE 估计类实际上比线性无偏估计类也要大。对于 $f_\theta \in R^m$, 设 $f_\theta^{\mathrm{T}} y$ 是 $\theta = l_a^{\mathrm{T}} a + l_b^{\mathrm{T}} b$ 的线性估计。运用 $E\{y\} = Aa + Bb$ 使之无偏, 有 $f_\theta^{\mathrm{T}} Aa + f_\theta^{\mathrm{T}} Bb = l_a^{\mathrm{T}} a + l_b^{\mathrm{T}} b$, $\forall a \in R^n$, $b \in R^p$ 成立, 或者 $l_a = A^{\mathrm{T}} f_\theta$ 和 $l = B^{\mathrm{T}} f_\theta$ 成立。这就等价于

$$\begin{cases} f^{\mathrm{T}}\theta(y + Az) = f_\theta^{\mathrm{T}}(y) + l_a^{\mathrm{T}} a, & \forall y \in R^m, a \in R^n \\ f^{\mathrm{T}}\theta(y + Bb) = f_\theta^{\mathrm{T}}(y) + l_b^{\mathrm{T}} b, & \forall y \in R^m, b \in R^p \end{cases} \tag{17}$$

比较式(16)和式(17)可知, 要求所有实数满足第一恒等式的条件显然比只要求所有整数满足第一恒等式要严格得多, 因此, 线性无偏估计类只是整数等变估计类的子集, 这个结论同时隐含表示 IE 估计类可能存在无偏估计类。如果将 IE 估计类表示为 IE, 无偏估计类表示为 U, 无偏 IE 估计类为 IEU, 无偏整数估计类为 IU, 线性无偏估计类为 LU, 则有: $IEU = IEIU \neq 0$, $LU \subset IEU$ 和 $IU \subset IEU$。

4 IE 估计类的表达式

为了更好地掌握 IE 估计类的操作, 有必要用一个表达式来揭示其结构, 下面的引理给出了这样一个表达式。

引理 IE 表达式(IE-representation)。设 $\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = f_\theta(y)$ 是 $\theta = l_a^{\mathrm{T}} a + l_b^{\mathrm{T}} b$ 的 IE 估计类, $y = A\alpha + B\beta + C\gamma$, 其中 $m \times (m - n - p)$ 维矩阵 C 满足使 (A, B, C) 可逆的条件, 再设 $g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) = f_\theta(A\alpha + B\beta + C\gamma)$, 于是, 存在一个函数 $h_\theta: R^n \times R^{m-n-p} \rightarrow R$, 使

$$g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) = l_a^{\mathrm{T}} \alpha + l_b^{\mathrm{T}} \beta + h_\theta(\alpha, \gamma) \tag{18}$$

成立。其中, 对于所有 $z \in Z^n$, $h_\theta(\alpha + z, \gamma) = h_\theta(\alpha, \gamma)$, h_θ 为周期的起始点。

证明 首先考虑充分条件: 如果 $g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) = l_a^{\mathrm{T}} \alpha + l_b^{\mathrm{T}} \beta + h_\theta(\alpha, \gamma)$, 易得: $g_\theta(\alpha + z, \beta + \zeta, \gamma) = g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) + l_a^{\mathrm{T}} z + l_b^{\mathrm{T}} \zeta$, $z \in Z^n$, $\zeta \in R^p$。又因为 $f_\theta(A\alpha + B\beta + C\gamma) = g_\theta(\alpha, \beta, \gamma)$ 和 (A, B, C) 可逆, 最后可得:

$$f_\theta(y + Az + B\zeta) = f_\theta(y) + l_a^{\mathrm{T}} z + l_b^{\mathrm{T}} \zeta, \quad \forall y \in R^m, z \in Z^n, \zeta \in R^p \tag{19}$$

这与定义 2 的特征是一致的。

然后考虑必要条件。如果式(19)成立, 定义为 $h_\theta(\alpha, \gamma) = f_\theta(A\alpha + B\beta + C\gamma) - l_a^{\mathrm{T}} \alpha - l_b^{\mathrm{T}} \beta$ 的函数 h_θ(其中 A、B、C 可逆)将是周期的起始点, 于是 $g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) = f_\theta(A\alpha + B\beta + C\gamma)$ 可以写成 $g_\theta(\alpha, \beta, \gamma) = l_a^{\mathrm{T}} \alpha + l_b^{\mathrm{T}} b + h_\theta(\alpha, \gamma)$。

根据该引理很容易设计 IE 估计。在设计 IE 估计时, 将涉及两种基本的自由度: ① 可以选择不同的矩阵 C; ② 可以选择不同的函数 h_θ。下面通过选择不同的 C 和 h_θ 来设计几个典型 IE 估计。

例 1 对于任意 C, $h_\theta = 0$, 得:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = l_a^{\mathrm{T}} \alpha + l_b^{\mathrm{T}} \beta$$

显然, 对于任意 C, 这是 θ 的线性无偏估计。可见, 矩阵 C 主导了这些线性无偏估计的选择。

例 2 设 $h_\theta = 0$, C 满足 $C^{\mathrm{T}} Q_y^{-1}(A, B) = 0$, 得最小二乘估计:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = l_a^{\mathrm{T}} \hat{a} + l_b^{\mathrm{T}} \hat{b}$$

这是模糊度和基线向量的浮点解。

例 3 设 $h_\theta(\alpha, \gamma) = -(l_a^{\mathrm{T}} + l_b^{\mathrm{T}} Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1})(\alpha - S(\alpha))$, C 满足 $C^{\mathrm{T}} Q_y^{-1}(A, B) = 0$, 得:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = l_a^{\mathrm{T}} \breve{a} + l_b^{\mathrm{T}} \breve{b}$$

这是模糊度的整数解和相应的基线固定解。

例 4 设 $h_\theta(\alpha, \gamma) = -(l_a^{\mathrm{T}} + l_b^{\mathrm{T}} Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1})(\alpha - S(\alpha))$, 其中 $S(\alpha) = \arg\min_{z \in Z^n} w(\alpha - z)^{\mathrm{T}} Q_{\hat{a}}^{-1}(\alpha - z)$, C 满足 $C^{\mathrm{T}} Q_y^{-1}(A, B) = 0$, 得整数最小二乘估计:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = l_a^{\mathrm{T}} \breve{a}_{\mathrm{ILS}} + l_b^{\mathrm{T}} \breve{b}_{\mathrm{ILS}}$$

例 5 设 $h_\theta(\alpha, \gamma) = -(l_a^{\mathrm{T}} + l_b^{T} Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1})(\alpha - \sum_{z \in Z^n} z w(\alpha - z))$, 其中 $\sum_{z \in Z^n} z w(\alpha - z) = 1$, $\forall \alpha \in R^n$, C 满足 $C^{\mathrm{T}} Q_y^{-1}(A, B) = 0$, 得:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IE}} = l_a^{\mathrm{T}} \hat{a}_{\mathrm{IE}} + l_b^{\mathrm{T}} \hat{b}_{\mathrm{IE}}$$

式中,

$$\begin{cases} \hat{a}_{\mathrm{IE}} = \sum_{z \in Z^n} z w(\hat{a} - z) \\ \hat{b}_{\mathrm{IE}} = \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1}(\hat{a} - \hat{a}_{\mathrm{IE}}) \end{cases}$$

注意到, 例 5 与整数模糊度估计(5)类似, 它们最主要的区别是两个估计由权确定的取值范围不同。在式(5)中, 权 $S_z(\hat{a})$ 是二值的, 要么取 1, 要么取 0, 而 $\hat{a}_{\mathrm{IE}}$ 中的权 $w(\hat{a} - z)$ 却在[0, 1]间变化。

既然 IE 估计类包括所有整数估计和线性无偏估计, 那么某一个 IE 估计如果满足最优条件, 它将自然而然优于整数估计和线性无偏估计。

5 最优整数等变估计

5.1 BIE 估计

定义好 IE 估计类后, 有必要寻找最优 IE 估

计。将 θ 的最优整数等变估计表示为 $\hat{\theta}_{BIE}$，并将均方差（mean squared error，MSE）作为最优准则。最优等变估计于是可以定义为：

$$\hat{\theta}_{BIE} = \arg\min_{f_\theta \in IE} E\{(f_\theta(\boldsymbol{y}) - \theta)^2\} \tag{20}$$

这里求最小将作用于所有满足定义 2 条件的整数等变函数。

选择 MSE 准则有双重意义。首先，概率准则可以用来度量估计值与目标值的接近程度；其次，MSE 可以用来度量浮点解本身的质量。下面的定理给出了上述最小问题的解。

定理 1 最优整数等变估计。设 $\boldsymbol{y} \in R^m$ 有均值 $E\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{Aa} + \boldsymbol{Bb}$ 和概率密度函数 $p_y(\boldsymbol{y})$，如果用 $\hat{\theta}_{BIE}$ 表示 $\theta = \boldsymbol{l}_a^T \boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}_b^T \boldsymbol{b}$ 时的最优整数等变估计，则有：

$$\hat{\theta}_{BEI} = \frac{\sum_{z \in Z^n} \int_{R^p} (\boldsymbol{l}_a^T \boldsymbol{z} + \boldsymbol{l}_b^T \beta) p_y(\boldsymbol{Y}) \mathrm{d}\beta}{\sum_{z \in Z^n} \int_{R^p} p_y(\boldsymbol{Y}) \mathrm{d}\beta} \tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b} - \beta)$。

注意到 BIE 估计也可以表示为：

$$\hat{\theta}_{BIE} = \boldsymbol{l}_a^T \hat{\boldsymbol{a}}_{BEI} + \boldsymbol{l}_b^T \hat{\boldsymbol{b}}_{BIE} \tag{22}$$

式中，

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{a}}_{BIE} = \sum_{z \in Z^n} \boldsymbol{z} \boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{y}), & \sum_{z \in Z^n} \boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{y}) = 1 \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{BEI} = \int_{R^p} \beta \boldsymbol{w}_\beta(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\beta, & \int_{R^p} \boldsymbol{w}_\beta(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\beta = 1 \end{cases}$$

这里权函数 $\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{y})$ 和 $w_\beta(\boldsymbol{y})$ 由式（21）定义，此式表明整数参数向量 $\boldsymbol{a}$ 的 BIE 估计也是 Z^n 内所有整数向量的带权和，如同式（5）中的 $\check{\boldsymbol{a}}$。同样在本式中，权在[0，1] 间变化，取决于 $\boldsymbol{y}$ 和其概率密度函数。这样导致的结果是 $\hat{\boldsymbol{a}}_{BEI}$ 总的来说是实数，而非整数。

对于观测值 $\boldsymbol{y}$ 的任何概率密度函数，上述定理均成立，因此这是一个非常广义的结果。进一步研究式（21）表明，计算 $\hat{\theta}_{BIE}$ 取决于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 乃至 θ。注意到主要是取决于式（21）中分子中的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，而不是分母中的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，因为在 Z^n 中对所有整数向量求和以及在 R^p 上积分不依赖于分母中的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$。对 θ 的依赖使得人们无法计算 $\hat{\theta}_{BIE}$。好在这种依赖关系在 $\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数有 $p_y(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Aa} - \boldsymbol{Bb})$ 结构时消失，这个性质对于一个大的概率密度函数类均成立。

5.2 BIE 优于 BLU

上述定理的一个直接和重要的结果就是 BIE 始终优于或至少等同于任何整数估计和线性无偏估计，毕竟整数估计类和线性无偏估计类都是 IE 估计类的子类。BIE 估计类在 MSE 意义上也是优于最优线性无偏估计（BLU）的。为了进一步显示 BIE 估计的无偏性，笔者引入 Guass-Markov-like 定理。

定理 2 最小方差无偏估计。BIE 估计是无偏的，且精度优于 BLU 估计：

$$\begin{aligned} E\{\hat{\theta}_{BIE}\} &= E\{\hat{\theta}_{BLU}\} \\ D\{\hat{\theta}_{BIE}\} &\leqslant D\{\hat{\theta}_{BLU}\} \end{aligned} \tag{23}$$

式中，$D\{\cdot\}$ 表示二阶矩操作符。

上述定理显示了对于 $\boldsymbol{y}$ 的一个相当大的概率密度函数类，人们在解决像式（1）的模型时，总可以提高 BLU 估计的精度，并同时保证估计的无偏性。如果应用上述定理去估计 GNSS 基线向量，并与浮点解和无偏固定解比较时，有：

$$\begin{aligned} D\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \leqslant D\{\check{\boldsymbol{b}}\} \quad &, \quad E\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \leqslant E\{\check{\boldsymbol{b}}\} \\ D\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \leqslant D\{\hat{\boldsymbol{b}}\} \quad &, \quad E\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \leqslant E\{\hat{\boldsymbol{b}}\} \end{aligned} \tag{24}$$

这两组矩阵不等式表明，对于所有 $\boldsymbol{l} \in R^p$，$\boldsymbol{l}^T D\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{l}^T D\{\check{\boldsymbol{b}}\} \boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{l}^T D\{\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}\} \boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{l}^T D\{\hat{b}_{BLU}\} \boldsymbol{l}$ 均成立，这样，基线估计 $\hat{\boldsymbol{b}}_{BIE}$ 的精度总是优于或至少与其相应的浮点解和固定解精度相同。

5.3 高斯分布情况

在大多数 GNSS 应用中，总是假设观测值 $\boldsymbol{y}$ 为高斯正态分布。在这种情况下，$\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数形式为：

$$p_y(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det \boldsymbol{Q}_y}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Aa} - \boldsymbol{Bb} \|_{\boldsymbol{Q}_y}^2\right\} \tag{25}$$

式中，$\| \cdot \|_{Q_y}^2 = (\cdot)^T \boldsymbol{Q}_y^{-1} (\cdot)$。BIE 估计在高斯概率密度函数时将有一个特殊的形式，可以用下列推论表达。

推论 高斯分布时的 BIE 估计。设观测值 $\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数形式为式（25），$\hat{\theta}_{BIE}$ 为 $\theta = \boldsymbol{l}_a^T \boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}_b^T \boldsymbol{b}$ 的整数等变估计，则

$$\hat{\theta}_{BIE} = \boldsymbol{l}_a^T \hat{\boldsymbol{a}}_{BIE} + \boldsymbol{l}_b^T \hat{\boldsymbol{b}}_{BIE} \tag{26}$$

式中，

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{BIE} = \sum_{z \in Z^n} \boldsymbol{z} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \| \hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{z} \|_{Q_{\hat{a}}}^2\right\}}{\sum_{z \in Z^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \| \hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{z} \|_{Q_{\hat{a}}}^2\right\}}$$

$$\check{\boldsymbol{b}}_{BIE} = \hat{\boldsymbol{b}} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{a}}_{BIE})$$

这个推论显示在高斯分布情况下，也可以用前面

介绍的三步过程来求最优等变估计，惟一不同的是，只需将整数估计的 $\check{a}$ 换为 BIE 估计的 $\hat{a}_{BIE}$。

上述推论中 $\hat{a}_{BIE}$ 和 $\hat{b}_{BIE}$ 的表达式与其在贝叶斯情况下的表达式相同[9~11]，但是这并不表示对于所有的情况都如此。不过这为目前已经存在的理论与贝叶斯方法架起了桥梁，尽管这两种方法也存在着相当重要的差异。如在最后解的评价上，BLU 估计量是基于无偏的最小方差的随机量，而在贝叶斯框架下，解被认为是非随机量。另外，未知参数假设为随机变量，为此，其先验概率分布应该确定。本文使用的方法是在非贝叶斯框架下，无需对先验分布作任何假设。

参 考 文 献

1 Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J. Global Positioning System: Theory and Practice. 5th ed. New York: Springer-Verlag, 2001

2 Leick A. GPS Satellite Surveying. 2nd ed. New York: John Wiley, 1995

3 Misra P, Enge P. Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance. Lincoln Massachusetts: Ganga-Jamuna Press, 2001

4 Parkinson B, Spilker J J. GPS: Theory and Application. Washington D C: AIAA, 1996

5 Strang G, Borre K. Linear Algebra, Geodesy, and GPS. Wellesley: Cambridge Press, 1997

6 Teunissen P J G, Kleusberg A. GPS for Geodesy. 2nd Enlarged ed. New York: Springer-Verlag, 1998

7 Teunissen P J G. Least-Squares Estimation of the Integer GPS Ambiguities. Invited Lecture, Section IV Theory and Methodology. IAG General Meeting, Beijing, 1993

8 de Jonge P J, Tiberius C C J M. The LAMBDA Method for Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects. LGR Series, Delft, 1996

9 Betti B, Crespi M, Sanso F. A Geometric Illustration of Ambiguity Resolution in GPS Theory and a Bayesian Approach. Manuscr. Geod., 1993, 18: 317~330

10 Gundlich B, Koch K R. Confidence Regions for GPS Baseline by Bayesian Statistics. Journal of Geodesy, 2002, 76: 55~62

11 Teunissen P J G. Statistical GNSS Carrier Phase Ambiguity Resolution: a Review. IEEE Symposium Statistical Signal Processing, Singapore, 2001

作者简介：P.J.G. Teunissen，教授，博士，荷兰皇家科学院院士。主要研究方向：GNSS 数据处理等。
E-mail: P.J.G.Teunissen@lr.tudelft.nl

A New Class of GNSS Ambiguity Estimators

P.J.G. Teunissen[1]

(1 Department of Earth Observation and Space System, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, Delft, Holland)

Abstract: A new class of GNSS ambiguity estimator is introduced in this paper. This class is referred to as the class of integer equivariant (IE) estimators since it still obeys the important integer remove-restore principle of integer estimation. It is shown that the IE-class is larger than the class of integer estimators as well as larger than the class of linear unbiased estimators. We will also give a useful representation of IE-estimators. This representation reveals the structure of IE-estimators and shows how they operate on the ambiguity float solution. Finally, the best integer equivariant estimation is proposed.

Key words: GNSS ambiguity resolution; integer equivariant estimation; best integer equivariant estimation

About the author: P. J. G. Teunissen, professor, Ph.D, academician of Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. His research oritation is GNSS data processing strategies for medium scaled networks with an emphasis on ambiguity resolution.
E-mail: P.J.G.Teunissen@lr.tudelft.nl

（责任编辑： 平子 ）