DOI :10.13203/j.whugis2004.08.015
第29卷 第8期　　武汉大学学报·信息科学版　　Vol. 29 No. 8
2004年8月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Aug. 2004

文章编号：1671-8860(2004)08-0720-05　　文献标识码：A

引力位虚拟压缩恢复法

申文斌[1]

(1　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室，武汉市珞喻路129号，430079)

摘　要：提出了一种将地球表面的引力位虚拟地压缩到地球内部的一个球体表面，进而求解在整个地球外部空间(包括地球边界上)的重力位场以及重力场的方法。

关键词：引力位；虚拟压缩恢复；重力场确定

中图法分类号：P223.0

由于地球边界非常复杂，直接利用地球边界求解大地测量边值问题极为困难。虽然Stokes方法简单，但在重力归算中也存在缺陷[1]。Molodensky曾提出了直接利用地球表面重力数据，并以地球表面为边界求解大地测量边值问题的方法[2,3]；但其求解过程极为复杂(给出的解是一个级数)，同时也引进了近似边界条件(即物理大地测量基本微分方程)，而且在理论上难以证明级数解的一致收敛性。Bjerhammar曾经提出了虚拟重力异常法[4]，同样引入了近似边界条件，然后采用迭代过程解积分方程，理论上也没有证明级数解的一致收敛性。利用球谐展开法通过边界条件确定球谐系数也可以确定地球外部重力场，但其困难在于不能保证球谐展开在地面附近是收敛的，而通常采用截断手段来求解球谐系数(未知系数是有限的)，但一经截断，必然是近似而不严密的。由于空间技术的发展，确定地球表面的形状已不成问题。随着光信号发射或接收技术的不断提高，预计在不远的将来即可制造出高精度的光信号频率接收器，从而可以通过重力频移法实现直接测定地球表面的重力位[5,6]，而不必采用传统的水准测量联合重力测量以确定重力位。

将地球表面的引力位 $V_{\partial\Omega}$($\partial\Omega$ 表示地球的边界)沿径向等值地压缩到地球内部的一个球面 ∂K 上，利用Poisson积分公式(它只适用于球形边界)可得到一阶近似解 $V^{*(1)}$(它本身是在 ∂K 外部调和且正则的函数)，进而构造一阶残差位场 $T^{(1)}=V-V^{*(1)}$，并将其在地球表面上的残差位压缩到球面 ∂K 上，得到二阶近似解 $V^{*(2)}$(它也是在 ∂K 外部调和且正则的函数)。如此进行下去，在理论上将得到一个在虚拟球外部调和、在无穷远处正则的虚拟引力位级数解(论证见后)：

$$V^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}$$

它在地球表面及其外部与地球的真实引力位场一致。于是，只要求出了地球外部的引力位场，也就确定了地球外部(包括边界)的重力场。

1　虚拟压缩恢复法

选取一个半径为 R 的虚拟球，或称之为Bjerhammar球 K[4]，它是一开集，其边界记为 ∂K，它被完全包含在地球 Ω 之中(Ω 是地球所占据的区域，也是一开集，其边界记为 $\partial\Omega$)，K 的中心与地球质心重合。因此，要构造出一个位函数 V^{*}，它在 K 的整个外部空间 K 满足：

$$\begin{aligned}&\Delta V^{*}(P)=0,\ P\in K\\&V^{*}(P)\big|_{\partial K}=V^{*}_{\partial K}\\&\lim_{P\to\infty}V^{*}(P)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

式中，Δ 是Laplace算符，而在地球的边界 $\partial\Omega$ 上，V^{*} 具有与地球真实引力位 V 相同的值，即

$$V^{*}(P)\big|_{\partial\Omega}\equiv V(P)\big|_{\partial\Omega}\qquad(2)$$

如果满足上述条件的虚拟引力位 V^{*} 存在，那么，在地球的整个外部空间 Ω(包括地球边

收稿日期：2004-04-10。

项目来源：国家自然科学基金资助项目(40374004，40174004)。

界), 它必定与地球的真实引力位 V 一致, 因为满足同样边界条件的正则调和函数是惟一的[7]。

假定已知地球表面的重力位 $W_{\partial\Omega}$(如采用重力位频移法[5,6]), 就可求出地球表面的引力位 $V_{\partial\Omega}$。将该引力位沿径向等值地压缩到虚拟球面 ∂K 上，然后寻求如下边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta V^{*(1)}(P)=0,\ P\in \overline{K}\\&V^{*(1)}(P)\big|_{\partial K}=V_{\partial\Omega}\\&\lim_{P\to\infty}V^{*(1)}(P)=0\end{aligned}\tag{3}$$

的解，其解由著名的 Poisson 积分公式[1,7]

$$V^{*(1)}(P)=\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{V^{*(1)}}{l^3}\mathrm{d}\sigma\equiv\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{V_{\partial\Omega}}{l^3}\mathrm{d}\sigma,\ P\in\overline{K}\tag{4}$$

给出。它是在上述所选虚拟球的外部空间 $\overline{K}$ 中调和并在无穷远处正则的位函数，其中, r 和 l 分别是场点 P 至地心以及积分面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的距离。当把位函数(4)限定在地球的外部空间区域 $\overline{\Omega}$(包括地球边界）之后, 可将它作为地球真实引力位的一级近似。令

$$T^{(1)}(P)=V(P)-V^{*(1)}(P),\ P\in\overline{\Omega}\tag{5}$$

称之为一阶残余引力位(注意，它定义在地球外部空间 $\overline{\Omega}$ 之中), 它在地球边界上的值可表示为:

$$T^{(1)}(P)_{\partial\Omega}=V(P)_{\partial\Omega}-V^{*(1)}(P)_{\partial\Omega}\tag{6}$$

类似于前面的推理过程，将一阶残余引力位 $T^{(1)}_{\partial\Omega}$沿径向等值地压缩到虚拟球面 ∂K 上, 然后寻求如下边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta V^{*(2)}(P)=0,\ P\in\overline{K}\\&V^{*(2)}(P)\big|_{\partial K}=T^{(1)}_{\partial\Omega}\\&\lim_{P\to\infty}V^{*(2)}(P)=0\end{aligned}\tag{7}$$

的解，其解由

$$V^{*(2)}(P)=\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{V^{*(2)}}{l^3}\mathrm{d}\sigma\equiv\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{T^{(1)}_{\partial\Omega}}{l^3}\mathrm{d}\sigma,\ P\in\overline{K}\tag{8}$$

给出，它是在虚拟球的外部空间 $\overline{K}$ 中调和并在无穷远处正则的位函数。当把它限定在地球的外部空间区域 $\overline{\Omega}$ 之后，可将此位函数作为一阶残余位的一级近似，或者，可将 $V^{*(1)}+V^{*(2)}$ 作为地球真实引力位的二级近似。

一般地，令

$$\begin{aligned}&T^{(0)}(P)\equiv V(P)\\&T^{(n)}(P)=T^{(n-1)}(P)-V^{*(n)}(P),\\&\qquad P\in\overline{\Omega},\ n\geqslant 1\end{aligned}\tag{9}$$

将 $T^{(n)}(P)$称为 n 阶残余引力位(它定义在包含了地球边界的地球之外部空间，其中零阶残余引力位被定义为地球的真实外部引力位)，它在地球边界上的值可表示为:

$$\begin{aligned}&T^{(0)}(P)_{\partial\Omega}\equiv V(P)_{\partial\Omega}\\&T^{(n)}(P)_{\partial\Omega}=T^{(n-1)}(P)_{\partial\Omega}-V^{*(n)}(P)_{\partial\Omega},\ n\geqslant 1\end{aligned}\tag{10}$$

将($n-1$)阶残余引力位 $T^{(n-1)}_{\partial\Omega}$沿径向等值地压缩到虚拟球面 ∂K 上，寻求如下边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta V^{*(n)}(P)=0,\ P\in\overline{K}\\&V^{*(n)}(P)\big|_{\partial K}=T^{(n-1)}(P)_{\partial\Omega}\\&\lim_{P\to\infty}V^{*(n)}(P)=0,\ n\geqslant 1\end{aligned}\tag{11}$$

的解, 其解由 Poisson 积分公式

$$V^{*(n)}=\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{V^{*(n)}}{l^3}\mathrm{d}\sigma\equiv\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{T^{(n-1)}_{\partial\Omega}}{l^3}\mathrm{d}\sigma,\ P\in\overline{K},\ n\geqslant 1\tag{12}$$

给出，它是在虚拟球的外部空间 $\overline{K}$ 中调和并在无穷远处正则的位函数。当把它限定在地球的外部空间区域 $\overline{\Omega}$ 之后，可将此位函数作为($n-1$)阶残余位 $T^{(n-1)}(P)$的一级近似，或者，可将 $V^{*(1)}+V^{*(2)}+\cdots+V^{*(n)}$作为地球真实引力位 V 的 n 级近似。于是，可得到一个在虚拟球域外部的级数解:

$$V^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}(P),\ P\in\overline{K}\tag{13}$$

它在边界 ∂K 上有:

$$V^{*}\big|_{\partial K}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}T^{(n)}\right)\big|_{\partial\Omega}$$

式中, $T^{(n)}|_{\partial\Omega}$由式(10) 给出。

期望由式(13) 决定的虚拟引力位场 $V^{*}(P)$ 在地球的外部与地球真实的引力位场 $V(P)$一致。为此, 只需证明由式(13) 给出的级数是一致收敛的, 这在另一篇文章中已作了证明。

由于式(13)一致收敛，因而微分与求和号可以交换[8]:

$$\Delta V^{*}(P)=\Delta\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta V^{*(n)}(P)=0,\ P\in K\tag{14}$$

由式(14)可直接得到:

$$\Delta V^{*}(P)=0,\ P\in\overline{\Omega}\tag{15}$$

求极限与求和号可以交换[8]:

$$\lim_{P\to\infty}V^{*}(P)=\lim_{P\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{P\to\infty}V^{*(n)}(P)=0\tag{16}$$

求和号内的各项可以任意组合(顾及到式(10))[8,9]:

$$V^{*}|_{\partial\Omega}=\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}|_{\partial\Omega}=\sum_{n=1}^{\infty}(T^{(n-1)}-T^{(n)})|_{\partial\Omega}=T^{(0)}|_{\partial\Omega}\equiv V|_{\partial\Omega}\tag{17}$$

其中用到了$\lim_{n\to\infty}T^{(n)}(P)=0$。为了证实这一点,先考察残余位的定义式(9)。由式(9)不难证明,$T^{(n)}$是在域Ω中调和并在无穷远处正则的函数($V^{*(n)}$是在包含了域Ω的域K中调和并在无穷远处正则的函数)。于是,由于$\lim_{P\to\infty}T^{(n)}(P)=0$,$T^{(n)}$的非零最大和最小值必定在边界$\partial\Omega$上达到(极值原理)[7,10]。进一步考察$V^{*(n)}$的Poisson积分表达式(12)。由于式(13)的一致收敛性,因而必定有$\lim_{n\to\infty}V^{*(n)}=0$。又因$V^{*(n)}$在域$K$中是连续函数,在边界$\partial K$上的取值为$V_{\partial K}^{*(n)}\equiv T^{(n-1)}|_{\partial\Omega}$,于是可得到:

$$0=\lim_{n\to\infty}V_{\partial K}^{*(n)}\equiv\lim_{n\to\infty}T^{(n-1)}|_{\partial\Omega}$$

即证明了下式成立(应用极值原理):

$$\lim_{n\to\infty}T^{(n)}(P)=0,\ P\in\Omega\tag{18}$$

综合式(15)~式(17)即可发现,这3个条件正好是地球真实引力位V在地球的外部(包括在地球的边界上)所满足的,而满足这3个条件的解是惟一的(自然也是正则调和的)[7,10]。这样,便得到了真实的地球外部引力位场:

$$V(P)\equiv V^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}(P),\ P\in\Omega\tag{19}$$

地球外部重力场则可按下式求出[1]:

$$W(P)=V(P)+Q(P)\equiv V^{*}(P)+Q(P)$$
$$g(P)=\nabla W(P),\ P\in\Omega\tag{20}$$

式中,$Q(P)$是离心力位;$W(P)$是重力位;$g(P)$是重力;∇是梯度算符(即Nabla算符)。

至此,从理论上给出了地球外部重力场的精确解(尽管该解表示成了一个一致收敛的级数形式),只要给定的边界值是精确的。在实际应用中,只需选取级数序列式(19)中的前面N项即可,N的大小则取决于对精度的要求,同时还与所选虚拟球(即Bjerhammar球)的半径有关。在选定了虚拟球的半径之后,当N足够大时,计算值与真值的差异可以任意小。通常,虚拟球的半径可选比地球的平均半径(即6 371km)约小30km即可。若再大,就有可能不被地球所包含,这是虚拟压缩恢复法所不容许的;若再小,无疑会使级数解的收敛速度降低,而且没有必要(除非是为了某种理论分析的需要)。但无论虚拟球选得多么小,所得到的级数解总是在所选球的外部一致收敛于一个正则的调和函数,当把它限定在地球外部时,与地球外部真实引力位完全重合。

2 简 例

假定地球是一刚性的均质圆球Ω,其半径记为R。于是,地球外部的引力位为:

$$V(P)=\frac{GM}{r},\ P\in\Omega\tag{21}$$

在边界上的值为:

$$V|_{\partial\Omega}=\frac{GM}{R}\tag{22}$$

今假定"观测到了"边界值(22),但并不知道地球外部的真实引力位(21),而要根据边界"观测值"求解外部引力位场。按虚拟压缩恢复法,并利用式(9)~式(13),很容易得到:

$$V^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_0}{R}\frac{GM}{r}(1-\frac{R_0}{R})^{n-1},\ P\in K\tag{23}$$

式中,$r\geqslant R_0$是场点P到地球质心(也是虚拟球的中心)的距离;R_0是虚拟球K的半径($R_0<R$)。不难证明,级数(23)在域K中是一致收敛的;同时,在地球外部,上述级数正好(一致)收敛于所期望的地球引力位$V=GM/r$中:

$$V^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_0}{R}\frac{GM}{r}(1-\frac{R_0}{R})^{n-1}=\frac{R_0}{R}\frac{GM}{r}[1-(1-\frac{R_0}{R})]^{-1}=\frac{GM}{r}\equiv V(P),\ P\in\Omega\tag{24}$$

针对上述简例,只选取前面的5项(即N为5)来计算其相对误差。选取R_0比较接近R,如$R_0=R-d$,其中d是一较小正数。考虑到真实地球,d大约不能小于20km,否则,虚拟球K就不能被完全包含在真实地球的内部。为此,暂且选$d=30$km,并选$R=6\ 370$km。于是,若只取前面5项来计算,不难算得由此而引起的相对误差为:

$$\lambda=1-(1-\frac{d}{R})[1+\frac{d}{R}+(\frac{d}{R})^2+(\frac{d}{R})^3+(\frac{d}{R})^4]=(\frac{d}{R})^5\approx2\times10^{-12}\tag{25}$$

这一相对精度远远高于目前测量重力位以及重力

所能达到的相对精度。这就是说, 在实际应用中, 只要计算出级数序列中前面不多的几项就够了。另外, 从式(25)还可以看出, 假如固定 $N=5$, 若令 d 作很小的变动(如几 km), 基本上不影响精度; 若令 $d=60$km, 则有 $\lambda \approx 2^5 \times 2 \times 10^{-12} \approx 6 \times 10^{-11}$, 精度降低了一个数量级有余(但仍然高于目前的观测精度)。这就是说, 在实际应用中, 没有必要将虚拟球选得太小, 也没有必要将虚拟球选为被包含在地球内部的最大的球; 前者会增大计算量(当然, 用计算机作完全相同的重复计算已不存在什么大问题), 后者则有可能引起不必要的麻烦。通常, 可放宽条件选取 d, 如取为 30km 或 40km 即可, 以保证虚拟球位于地球的内部, 同时它又比较接近地球。

3 评 论

在大地测量中, 划时代意义的边值问题解法有 Stokes 法(1849)、Molodensky 法(1962)以及 Bjerhammar 法(1964)三种方法。

Stokes 方法以大地水准面为边界面[1], 需要知道大地水准面上的重力异常, 而重力异常不可能精确知道, 因为重力观测值并非在大地水准面上, 这时需要进行重力归算。在进行重力归算时, 需要知道大地水准面与地面之间物质层的密度, 这是未知量, 只能取估计值, 这是 Stokes 方法最大的缺陷。

Molodensky 方法以地球表面为边界[2], 以地面上的重力异常为边界值, 避免了重力归算问题。然而, Molodensky 方法存在如下缺陷: ① 引入了物理大地测量基本微分方程作为限制性条件, 但该方程是一个近似方程; ② 求解极为繁琐, 需要解积分微分方程; ③ 求出的解是一个级数, 理论上未能证明其收敛性, 除非作一些非常特殊的不为地球所满足的假定[3]。

Bjerhammar 最先将虚拟球的概念引入边值问题[4], 他将 Molodensky 边值问题转化为虚拟球上的边值问题。其基本思想是: 在虚拟球面上构造一个虚拟重力异常 Δg^*, 利用 Stokes 公式求解虚拟球外部的场, 使得由此得到的地面虚拟重力异常与地面真实重力异常相同。为了实现这一目标, 需要采用迭代法求解积分微分方程, 其解是一个级数。然而, Bjerhammar 方法具有如下缺陷: ① 与 Molodensky 方法一样, 引入了物理大地测量的基本微分方程, 但该方程是一个近似方程; ② 求解繁琐, 需要反解积分微分方程; ③ 给出的解是一个级数, 理论上没有(或不能够)证明它的收敛性。

许厚泽等在 1984 年提出了虚拟单层密度法[11], 后来, Bjerhammar 也提出了虚拟单层密度法[12], 两者略有差异(虚拟单层密度所满足的边界微分方程不同), 但基本思想一致[13]。其基本思想是: 在虚拟球上构造一个单层密度函数, 使得由此产生的场满足物理大地测量的基本微分方程, 该方程将地面上的重力异常与虚拟单层密度函数联系了起来。虚拟单层密度法与前面提到的 Bjerhammar 方法(虚拟重力异常法)大同小异, 同样存在上述的 3 个缺陷。

综上所述, 无论是 Stokes 方法、Molodensky 方法, 还是 Bjerhammar 方法, 均没有给出严密解。本文借鉴了 Bjerhammar 虚拟球的概念, 但与 Bjerhammar 的重要区别在于: Bjerhammar 先设想了一种虚拟分布(虚拟重力异常或如许厚泽等所设想的虚拟单层密度), 然后通过解积分方程求解这种分布, 不能给出严密解(因此引入了近似边界条件), 而且不知道所给出的级数解究竟是否一致收敛; 本文则无需事先假定虚拟分布, 而是采用压缩-恢复(或压缩-释放)的思想直接求解外部场, 给出了严密的、一致收敛的级数解, 而虚拟球上的虚拟分布(可将它设想成虚拟引力位)只是一种附带产品。

最后需指出的是, 本文提出的虚拟压缩恢复法可以推广使用。比如, 若已知地球表面的重力矢量或重力梯度, 也可采用虚拟压缩恢复法求出地球外部的重力场[14]。甚至还可以仅根据卫星界面上的重力数据精确确定整个地球外部的重力场, 从而克服了现有的按球谐展开法确定地球外部重力场模型的理论缺陷。这种理论缺陷是指以下两个方面: ① 不能保证球谐展开在地面附近收敛; ② 采用了截断手段。

参 考 文 献

1 Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Freeman and Company, 1967

2 Molodensky M S, Eremeev V F, Yurkina M I. Methods for Study of the External Gravitation Field and Figure of the Earth (Translated from Russian 1960). Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1962

3 Moritz H. Advanced Physical Geodesy. Karlsruhe: Wichmann, 1980. 330~364; 401~414

4 Bjerhammar A. A New Theory of Geodetic Gravity. Trans. Royal Inst. Tech., 1964(243)

5 Shen W B, Chao D B, Jin B R. On the Relativistic

Geoid. Bollettino di Geodesia e Scienze Afini, 1993, 52: 207-216

6 Shen W B, Chao D B, Jin B R. The Concept and Application of the Equifrequency Geoid. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1994, 19: 232~238 (in Chinese)

7 Yjelson F. Potential Theory and Its Applications in the Theory of the Earth's Figure and Geophysics. Translated by Ning J S, Guan Z L, Fang R S. Beijing: China Institute Press, 1963. 28~31; 42; 43 (in Chinese)

8 Fyhedengortz K M. The Differential and Integrational Course. Beijing: People's Education Press, 1954. 378~409 (in Chinese)

9 Shen W B. A General Expression of the Earth's Gravitational Potential's Series Expansion. Bollettino di Geodesia e Scienze Afini, 1995, 54: 361~372

10 Gu C H. Mathematical and Physical Equation. Beijing: People's Education Press, 1979. 104 ~ 106 (in Chinese)

11 Xu H Z, Zhu Z W. The Fictitious Single Layer Density Expression of the Earth's External Gravity Field. China Science (B), 1984, 6: 575 ~ 580

12 Bjerhammar A. Discrete Physical Geodesy. Rep. No. 380, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, 1987

13 Li J C, Chen J Y, Ning J S, et al. The Approach Theory of the Earth's Gravity Field and the Determination of the Quasigeoid 2000 China. Wuhan: Wuhan University Press, 2003. 34; 35

14 Shen W B, Ning J S. The Fictitious Compress-recuperation Method of Determining the Earth's External Gravity Field. The Meeting of the China Geodetic Commission, Lijiang, Yunnan, 2003 (in Chinese)

作者简介:申文斌,教授,博士。研究方向为大地测量和地球物理学。代表成果:空间与时间探索(专著),地球动力学参考系理论(合作专著)。

E-mail: wbshen@sgg.wtusm.edu.cn

Fictitious Compress-Recuperation of Gravitational Potential

SHEN Wenbin[1]

(1 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: In this paper, the author creates a new method, by which the earth's external gravity field can be precisely determined, provided that the geopotential on the earth's surface is known. The main idea about the determination of the earth's external gravity field is stated.

Key words: gravitational potential; fictitious compress-recuperation; gravity field determination

About the author: SHEN Wenbin, professor, Ph. D. His research orientation includes geodesy and geophysics. His main publications include explorations of space and time, the theory of geodynamics reference system, etc.

E-mail: wbshen@sgg.wtusm.edu.cn

(责任编辑: 光阳)