DOI :10.13203/j.whugis2004.08.011
第 29 卷 第 8 期 武 汉 大 学 学 报 · 信 息 科 学 版 Vol. 29 No. 8
2004 年 8 月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Aug. 2004

文章编号: 1671-8860(2004)08-0704-04 文献标识码: A

OTF 方式下短程 GPS 精密动态定位的数学模型

周扬眉[1] 刘经南[2]

(1 武汉大学GPS 工程技术研究中心, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)
(2 武汉大学校长办公室, 武汉市珞珈山, 430072)

摘 要: 讨论了在 OTF 方式下短程 GPS 精密动态定位的函数模型和随机模型, 给出了一个适宜于在计算机上编程实现的通用法方程式, 并通过设置权比因子是否为零来达到这四类观测值选择使用的目的。阐明了当只选用两类精码观测值进行动态定位时, OTF 方式与单历元方式是等价的, 并通过实例试算验证了本文给出的数学模型是完全正确和有效的。

关键词: OTF 方式; 精密动态定位; 权比因子; 通用法方程式
中图法分类号: P228.42

GPS 的动态定位分为单历元和 OTF 两种方式。由于单历元方式的 GPS 动态定位的观测值数量较少, 模糊度的求解主要依赖于精密伪距观测值的质量。通常由于精密伪距观测值较载波相位观测值而言有着较大的观测噪声, 因此, 在这种方式下难以得到正确的整周模糊度解。OTF 方式下的 GPS 动态定位是在各历元的观测值积累到足够多时, 再来求解模糊度向量和各历元基线位置参数向量的, 这是一个逆向求解的过程。由于这种方式下的多余观测值较多, 一般能求出正确的模糊度解和高精度的位置参数解, 因此, 在目前大部分的 GPS 动态定位中, 常将它作为工作方式。另外, 通常 GPS 观测值有非差模式、单差模式、双差模式和三差模式。由于双差模式较其他模式而言, 消除了大部分系统性的观测误差, 并且其模糊度具有整数特性, 因此, 常将它作为工作模式。在 GPS 精密定位工作中, 常采用的 GPS 原始观测值大致有 L_1、L_2 相位观测值和 P_1、P_2 精码观测值, 因此, 研究包含这 4 类观测值并适用于编程的精密动态定位的数学模型是非常有意义的。

1 函数模型

通过跟踪 GPS 卫星, 可获得 L_1、L_2 载波相位和 P_1、P_2 精码的原始观测值方程为[1]:

$$\begin{cases} \lambda_1\varphi^s_{(1)r} = \rho^s_r - c\delta t_s - \lambda_1\phi_{(1)s0} - I_1 + T + \\ \qquad c\delta t_r + \lambda_1\phi_{(1)r0} - \lambda_1 N^s_{(1)r} + \varepsilon_{\phi_1} \\ \lambda_2\varphi^s_{(2)r} = \rho^s_r - c\delta t_s - \lambda_2\phi_{(2)s0} - \dfrac{f_1^2}{f_2^2}I_1 + T + \\ \qquad c\delta t_r + \lambda_2\phi_{(2)r0} - \lambda_2 N^s_{(2)r} + \varepsilon_{\phi_2} \\ p^s_{(1)r} = \rho^s_r - c\delta t_s + I_1 + T + c\delta t_r + \varepsilon_{p_1} \\ p^s_{(2)r} = \rho^s_r - c\delta t_s + \dfrac{f_1^2}{f_2^2}I_1 + T + c\delta t_r + \varepsilon_{p_2} \end{cases} \tag{1}$$

式中, $\varphi^s_{(i)r}$为 L_1/L_2 从接收机 r 到卫 s 的相位观测值; $p^s_{(i)r}$为 L_1/L_2 从 r 到 s 的精码观测值; ρ^s_r 为 r 到 s 的几何距离; c 为光速; δt_s 为卫星钟差; λ_1 和 λ_2 分别为 L_1 和 L_2 的载波相位的波长; $\phi_{(1)s0}$和 $\phi_{(2)s0}$分别为卫星振荡器相应于 L_1 和 L_2 的初始相位; I_1 为 L_1 的电离层延迟; T 为对流层延迟; δt_r 为接收机钟差; $\phi_{(1)r0}$和 $\phi_{(2)r0}$分别为接收机振荡器相应于 L_1 和 L_2 的初始相位; $N^s_{(1)r}$和 $N^s_{(2)r}$分别为 L_1 和 L_2 在 s 到 r 之间的整周模糊度; ε_{ϕ_1}、ε_{ϕ_2}、ε_{p_1}、ε_{p_2} 分别为 $\varphi_{(1)}$、$\varphi_{(2)}$、$p_{(1)}$ 和 $p_{(2)}$ 的观测噪声。

在短基线情况下, 式(1)的双差模式为:

$$\begin{cases} \lambda_1 \nabla\Delta\varphi^{s_k,l}_{(1)r_{i,j}} = \nabla\Delta\rho^{s_k,l}_{r_{i,j}} + \lambda_1\nabla\Delta N_1 + \varepsilon_{(1)} \\ \lambda_2 \nabla\Delta\varphi^{s_k,l}_{(2)r_{i,j}} = \nabla\Delta\rho^{s_k,l}_{r_{i,j}} + \lambda_2\nabla\Delta N_1 + \varepsilon_{(2)} \\ \nabla\Delta p^{s_k,l}_{(1)r_{i,j}} = \nabla\Delta\rho^{s_k,l}_{r_{i,j}} + \varepsilon_{p(1)} \\ \nabla\Delta p^{s_k,l}_{(2)r_{i,j}} = \nabla\Delta\rho^{s_k,l}_{r_{i,j}} + \varepsilon_{p(2)} \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2004-04-28。
项目来源: 国家自然科学基金资助项目(40174005)。

式中, $\nabla\Delta\varphi_{r_{i,j}}^{s_{k,l}}=\varphi_{r_i}^{s_k}-\varphi_{r_i}^{s_l}-\varphi_{r_j}^{s_k}+\varphi_{r_j}^{s_l}$; $\nabla\Delta p_{r_{i,j}}^{s_{k,l}}=p_{r_i}^{s_k}-p_{r_i}^{s_l}-p_{r_j}^{s_k}+p_{r_j}^{s_l}$; $\nabla\Delta\rho_{r_{i,j}}^{s_{k,l}}=\rho_{r_i}^{s_k}-\rho_{r_i}^{s_l}-\rho_{r_j}^{s_k}+\rho_{r_j}^{s_l}$; $\nabla\Delta N=N_{r_i}^{s_k}-N_{r_i}^{s_l}-N_{r_j}^{s_k}+N_{r_j}^{s_l}$; $\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{p(1)}$和$\varepsilon_{p(2)}$分别为 $\varphi_{(1)}$、$\varphi_{(2)}$、$p_{(1)}$和 $p_{(2)}$ 在双差模式下的观测噪声。式(2)已消除了包括卫星钟差、卫星振荡器的初相、接收机钟差、接收机振荡器的初相、电离层延迟和对流层延迟在内的大部分观测误差。这是双差模式所具有的优越性。

对式(2)进行线性化, 则对于第 i 个历元在双差模式下误差方程的一般形式为:

$$\boldsymbol{V}_i=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\boldsymbol{B}_i&0&\cdots&0&\lambda_1\boldsymbol{I}&0\\0&\cdots&0&\boldsymbol{B}_i&0&\cdots&0&0&\lambda_2\boldsymbol{I}\\0&\cdots&0&\boldsymbol{B}_i&0&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&\boldsymbol{B}_i&0&\cdots&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\left[\Delta\boldsymbol{X}_1\ \cdots\Delta\boldsymbol{X}_i\ \cdots\Delta\boldsymbol{X}_n\ \ \nabla\Delta\boldsymbol{N}_1\ \ \nabla\Delta\boldsymbol{N}_2\right]^{\mathrm{T}}+\left[\boldsymbol{l}_{(1)i}\ \ \boldsymbol{l}_{(2)i}\ \ \boldsymbol{l}_{p(1)i}\ \ \boldsymbol{l}_{p(2)i}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中, $\boldsymbol{V}_i=(\boldsymbol{V}_{(1)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{V}_{(2)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{V}_{p(1)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{V}_{p(2)i}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为第 i 个历元观测值的改正数向量; $\Delta\boldsymbol{X}_i\in R^t$ 为基线的位置参数向量(R^t 表示 t 维实数空间, t 为未知的位置参数个数, 下同); $\boldsymbol{B}_i$ 为位置参数向量的系数矩阵; n 为平差时的观测历元总数; $\boldsymbol{I}$ 为 $m\times m$ 阶单位矩阵; $\nabla\Delta\boldsymbol{N}_1\in R^m$ 和 $\nabla\Delta\boldsymbol{N}_2\in R^m$ 分别为相应于L_1和 L_2 的双差相位整周模糊度向量(R^m 表示 m 维的实数空间, m 为双差相位模糊度向量的维数, 下同); $\boldsymbol{l}_{(1)i}$、$\boldsymbol{l}_{(2)i}$、$\boldsymbol{l}_{p(1)i}$和$\boldsymbol{l}_{p(2)i}$分别为包含第 i 个历元 $\nabla\Delta\varphi_{(1)}$、$\nabla\Delta\varphi_{(2)}$、$\nabla\Delta p_{(1)}$ 和 $\nabla\Delta p_{(2)}$的(自由)常数项向量。

若同时兼顾 n 个历元, 则在双差模式下误差方程的一般形式为:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{L} \tag{4}$$

式中, $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{V}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{Y}=(\Delta\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \Delta\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}},\ \nabla\Delta\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}},\ \nabla\Delta\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{L}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{L}_i=(\boldsymbol{l}_{(1)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{l}_{(2)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{l}_{p(1)i}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{l}_{p(2)i}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; 其中,

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}0&\cdots&\boldsymbol{B}_i&\cdots&0&\lambda_1\boldsymbol{I}&0\\0&\cdots&\boldsymbol{B}_i&\cdots&0&0&\lambda_2\boldsymbol{I}\\0&\cdots&\boldsymbol{B}_i&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&\boldsymbol{B}_i&\cdots&0&0&0\end{bmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

2　随机模型

对于第 i 个历元, 假定原始的各类观测值不相关, 同时还假定同类不同卫星间的原始观测值不相关, 则在双差模式下四类观测值(L_1、L_2、P_1、P_2)的先验方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}_i=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_1},\frac{1}{\beta_2}\right)\otimes\boldsymbol{D}_{\nabla\Delta} \tag{5}$$

式中, α_1、α_2、β_1 和 β_2 为四类观测值的权比因子; $\otimes$为克罗内格(Kronecker)积;

$$\boldsymbol{D}_{\nabla\Delta}=2\sigma^2\begin{bmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&2\end{bmatrix}$$

其中, σ^2 为单位权方差。此时, 相应的权阵为:

$$\boldsymbol{P}_i=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\otimes\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \tag{6}$$

式中,

$$\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}=\sigma^2\boldsymbol{D}_{\nabla\Delta}^{-1}=\frac{1}{2n_s}\begin{bmatrix}n_s-1&-1&\cdots&-1\\-1&n_s-1&&-1\\\vdots&&&\vdots\\-1&-1&\cdots&n_s-1\end{bmatrix}$$

n_s 为第 i 个历元的共视卫星数。

若观测了 n 个历元, 假定各历元间的观测数据互不相关, 则 n 个历元观测值的先验方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_n\} \tag{7}$$

相应的权阵为:

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n\} \tag{8}$$

式(7)和式(8)中的矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 都是块对角矩阵。

3　整周模糊度和基线位置参数的求解

对式(4)进行一般的最小二乘平差, 并假定各历元的共视卫星数相同, 则其法方程为:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}=0 \tag{9}$$

若令 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2$, 则式(9)可进一步写为:

$$\begin{bmatrix}\gamma\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_1&0&\cdots&0&\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}&\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\\0&\gamma\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_2&&0&\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}&\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\\\vdots&&&&&\vdots\\0&0&&\gamma\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_n&\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}&\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\\\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_1&\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_2&&\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_n&n\alpha_1\lambda_1^2\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}&0\\\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_1&\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_2&\cdots&\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\boldsymbol{B}_n&0&n\alpha_2\lambda_2^2\boldsymbol{P}_{\nabla\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{X}_1\\\Delta\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\Delta\boldsymbol{X}_n\\\nabla\Delta\boldsymbol{N}_1\\\nabla\Delta\boldsymbol{N}_2\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(1)1} + \alpha_2 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(2)1} + \beta_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)1} + \beta_2 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)1} \\ \alpha_1 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(1)2} + \alpha_2 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(2)2} + \beta_1 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)2} + \beta_2 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)2} \\ \vdots \\ \alpha_1 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(1)n} + \alpha_2 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{(2)n} + \beta_1 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)n} + \beta_2 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)n} \\ \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \sum_1^n l_{(1)i} \\ \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \sum_1^n l_{(2)i} \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

式(10)看上去显得很有规律性，当 $\Delta \boldsymbol{X}_1 = \Delta \boldsymbol{X}_2 = \cdots = \Delta \boldsymbol{X}_n$ 时，式中的相应矩阵子块都可合并而得到GPS 精密静态定位的法方程式。因此，GPS 精密静态定位是 OTF 方式下 GPS 精密动态定位的特例。另外，式(10)具有一定的组合性质，当只采用两类精密伪距 $P_{(1)}$ 和 $P_{(2)}$ 进行平差时，只需令式(10)中的 $\alpha_1 = 0$ 和 $\alpha_2 = 0$，并顾及到伪距没有整周模糊度，可得其法方程为：

$$\begin{bmatrix} (\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{B}_2 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{X}_1 \\ \Delta \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{X}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)1} + \beta_2 \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)1} \\ \beta_1 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)2} + \beta_2 \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)2} \\ \vdots \\ \beta_1 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(1)n} + \beta_2 \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\nabla\Delta} \boldsymbol{l}_{p(2)n} \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

由于式(11)中的法方程系数矩阵是一个基于各历元法方程的块对角矩阵，因此，可用各历元的法方程矩阵单独来求解相应历元的 $\Delta \boldsymbol{X}_i$，即用式(11)求得的未知参数估值与在单历元方式下 GPS 动态定位求得的未知参数估值完全相同。这说明当只用精密伪距时，OTF 方式与单历元方式等价。

明显地，式(10)是一个OTF 方式下通用的法方程表达式。通过设置权比因子 α_1、α_2、β_1 和 β_2 是否等于零，来达到四类观测值的选择使用的目的，并快速组成其法方程。因此，式(10)对编制程序非常方便。

对法方程式(9)或式(10)进行求解，可得各历元基线位置参数和整周模糊度的浮点解 $\Delta \boldsymbol{X}_i \in R^t$ 和 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}_1 \in R^m$ 以及 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}_2 \in R^m$。再通过 FARA 搜索法[5] 或整数最小二乘法[6] 来求出模糊度的整数解 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}_1 \in Z^m$（即 m 维整数空间，下同）和 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}_2 \in Z^m$。最后，根据下式可求出各历元基线位置参数的固定解向量[7]：

$$\Delta \boldsymbol{X}_i = \Delta \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{D}_{\Delta X_i \nabla\Delta N} \boldsymbol{D}_{\nabla\Delta N}^{-1} (\nabla\Delta \boldsymbol{N} - \nabla\Delta \boldsymbol{N}) \tag{12}$$

式中，$\nabla\Delta \boldsymbol{N} = (\nabla\Delta \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}, \nabla\Delta \boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\nabla\Delta \boldsymbol{N} = (\nabla\Delta \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}, \nabla\Delta \boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，且 $\nabla\Delta \boldsymbol{N} \in R^{2m}$，$\nabla\Delta \boldsymbol{N} \in Z^{2m}$；$\boldsymbol{D}_{\Delta X_i \nabla\Delta N}$ 为 $\Delta \boldsymbol{X}_i$ 与 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}$ 的协方差阵；$\boldsymbol{D}_{\nabla\Delta N}$ 为 $\nabla\Delta \boldsymbol{N}$ 的方差阵。

当不考虑模糊度整数解的统计性质时，对式(12)应用方差-协方差传播定律可得基线位置参数固定解的方差阵为：

$$\boldsymbol{D}_{\Delta X_i} = \boldsymbol{D}_{\Delta X_i} - \boldsymbol{D}_{\Delta X_i \nabla\Delta N} \boldsymbol{D}_{\nabla\Delta N}^{-1} \boldsymbol{D}_{\nabla\Delta N \Delta X_i} \tag{13}$$

式(13)说明各历元基线位置参数固定解的精度明显优于其浮点解的精度。

4 实例试算

以一条 16.281m 长的短基线来试算，接收机的采样间隔为 15s。用本文中动态定位的数学模型来求解静态基线，主要是考虑到通过比较各历元位置参数向量的解来非常直观地验证动态定位结果的正确性。表 1 为观测历元数累积至 13 个时OTF 方式下 GPS 精密动态定位的解算结果。

从表 1 可以看出，各个历元的位置参数解(包括浮点解和固定解)大致相等，这是用动态定位的数学模型来处理静态基线时的特点，说明本文所给出的动态定位的数学模型是完全正确的。另外，各个历元位置参数固定解的精度远远高于其浮点解的精度，并且各历元位置参数的固定解都非常接近于 16.281m，这说明本文所给出的动态定位的数学模型足以满足短程精密定位的要求。

表 1　**OTF** 方式下 **GPS** 动态定位的执行结果

Tab.1　Performance Results of GPS Mobile Positioning in the OTF Way

历元序号	位置参数的浮点解/m	位置参数浮点解的中误差/m	位置参数的固定解/m	位置参数固定解的中误差/mm
第 1 个历元	16.861	±0.471	16.275	±1.8
第 2 个历元	16.862	±0.469	16.276	±1.8
第 3 个历元	16.866	±0.468	16.280	±1.8
第 4 个历元	16.866	±0.467	16.280	±1.8
第 5 个历元	16.868	±0.465	16.283	±1.8
第 6 个历元	16.871	±0.464	16.285	±1.8
第 7 个历元	16.864	±0.463	16.279	±1.8
第 8 个历元	16.868	±0.461	16.283	±1.8
第 9 个历元	16.859	±0.460	16.274	±1.8
第 10 个历元	16.866	±0.458	16.280	±1.8
第 11 个历元	16.869	±0.457	16.284	±1.8
第 12 个历元	16.866	±0.455	16.281	±1.8
第 13 个历元	16.871	±0.454	16.286	±1.8

注: 为了方便比较, 表中的位置参数浮点解和其固定解都为由相应的坐标增量算得的基线长。

5　结　语

OTF 方式下 GPS 精密动态定位的关键是整周模糊度的确定。而在整周模糊度确定之后, GPS 精密动态定位的数学模型非常简单, 因此, 本文所讨论的数学模型是整周模糊度确定时的数学模型。另外, 为了方便讨论, 这里假定不存在周跳和多路径误差的影响。同时, 由于本文讨论的是短程 GPS 定位, 电离层延迟和对流层延迟的影响在双差模式下已绝大部分被消除, 卫星轨道误差的影响也较小, 因此数学模型中没有包括这些误差。至于速度向量和加速度向量也没有包含在数学模型中, 它们可通过相邻历元的位置参数向量来求出。如对于第 i 个历元, 其速度向量和加速度向量分别为 $V_i=(\Delta X_i-\Delta X_{i-1})/\Delta t$ 和 $a_i=(V_i-V_{i-1})/\Delta t$($\Delta t$ 为接收机的采样间隔)。当然, 在诸如碎部测量和工程放样的动态定位中, 速度向量和加速度向量是毫无意义的。因此, 本文的数学模型中没有包含速度向量和加速度向量, 这不仅减少了待估参数, 使问题更加简单化, 而且更具有广泛的应用性。最后还必须指出的是, 法方程式(9)~式(11)是在假定各历元共视卫星数相同的条件下得到的。当观测时段较短时, 这种理想情况经常出现。此时若用 LAMBDA 方法只需很少的历元数就能得到正确的整周模糊度解, 显然, 这种理想情况从目前的技术上来讲也是可行的。但当观测时段较长时, 不同历元的共视卫星数将会发生变化, 这种情况可这样来处理: 从共视卫星数发生变化时的那个历元开始, 用式(10)重新组构新的法方程式, 并求出各历元的位置参数解和整周模糊度解; 继续这个过程, 直到整个观测时段结束, 从而可得到整个定位时段各历元的位置参数解。

参　考　文　献

1　Landau H, Euler H J. On-the-Fly Ambiguity Resolution for Precise Differential Positioning. ION-92, Alexandria, VA., 1992. 607~613

2　崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 2001

3　周忠谟, 易杰军, 周　琪. GPS 卫星测量原理与应用. 北京: 测绘出版社, 1992

4　Abidin H Z. On the Construction of the Ambiguity Searching Space for On-the-Fly Ambiguity Resolution. Journal of Navigation, 1993, 40: 321~338

5　Frei E, Beutler G. Rapid Static Positioning Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach FARA: Theory and First Results. Manuscr. Geod., 1990, 15: 325~356

6　Teunissen P J G. The Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: a Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation. Journal of Geodesy, 1995, 70: 65~82

7　Dong D, Bock Y. Global Positioning System Network Analysis with Phase Ambiguity Resolution Applied to Crustal Deformation Studies in California. Journal of Geophysics Research, 1989, 94: 3 949~3 966

第一作者简介: 周扬眉, 博士。研究方向为 GNSS 精密定位的理论及应用。代表成果: 用于高维模糊度降相关的双乔里斯基整数变换方法; 回代的 LAMBDA 方法等。

E-mail: zhouyangmei@21cn.com

(下转第 719 页)

282～289

9　Milan B, Kouba J, Kumar M, et al. Geoidal Geopotential and World Height Datum. The 22nd IAG General Assembly, Symposium G1, Birmingham, 1999

10　Grafarend E W, Ardalan A. W_0: an Estimate in the Finnish Height Datum N60, Epoch 1993. 4, from Twenty-five GPS Points of the Baltic Sea Level Projects. Journal of Geodesy, 1997(71): 673～679

第一作者简介：郭海荣，博士生。现主要从事大地测量数据处理和卫星轨道等方面的研究。

E-mail: hairongguo@263.net

Systematic Error of the 1985 National Height Datum

GUO Hairong[1]　*JIAO Wenhai*[2]　*YANG Yuanxi*[2]　*LIU Guangming*[2]

(1　Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

(2　Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an 710054, China)

Abstract: In this paper, the vertical shift of the origin of the 1985 national height datum with respect to the geoidal surface is calculated based on the methods of the geopotential, the difference of the height anomalies and the sea surface topography model. The results are in good consistent.

Key words: height anomaly; sea surface topography; geoid; quasigeoid

About the first author: GUO Hairong, Ph. D candidate, majors in geodesy data processing and satellite orbit determination, etc.

E-mail: hairongguo@263.net

（责任编辑：　平子）

（上接第 707 页）

Mathematical Model of Short-Distance and Precise GPS Mobile Positioning in the OTF Way

ZHOU Yangmei[1]　*LIU Jingnan*[2]

(1　Research Center of GPS, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Presidential Secretariate, Wuhan University, Luojia Hill, Wuhan 430072, China)

Abstract: The function model and the stochastic model of short distance GPS mobile positioning are discussed in the OTF (on-the-flying) way; then the general normal equation to suit programming in computer is given in order that these four classes of observable may be selected in the way whether let the scale factors equal to zero. In addition, it is clarified that the OTF way is equivalent to the single epoch way in the case that only two classes of precise codes are selected in precise mobile positioning. Last, it is clarified by an example that the given mathematical model is accurate and effective.

Key words: OTF way; precise mobile positioning; scale factor; general normal equation

About the first author: ZHOU Yangmei, Ph. D. His major research orientation includes GNSS precise positioning theory and application. His typical achievements are: a paired Cholesky integer transformation approach to high-dimensional ambiguity decorrelation; Return LAMBDA method, etc.

E-mail: zhouyangmei@21cn.com

（责任编辑：　晓平）