

用  $L$ -曲线法确定半参数模型中的平滑因子王振杰<sup>1,2</sup> 欧吉坤<sup>1</sup> 曲国庆<sup>2</sup> 韩保民<sup>2</sup>

(1 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉市徐东路 174 号, 430077)

(2 山东理工大学建筑工程学院, 淄博市张周路 12 号, 255012)

**摘要:**提出了一种新的方法—— $L$ -曲线法确定平滑因子。通过确定合适的平滑因子,更好地控制了残差部分  $V^T P V$  与光滑度部分  $S^T R S$  之间的平衡,得到了更准确的参数估值。通过算例,将基于  $L$ -曲线法确定平滑因子的半参数模型解算方法和其他方法进行了比较。结果表明,用  $L$ -曲线法确定平滑因子后,提高了半参数模型计算结果的精度,可以更好地将观测值中的系统误差分离出来。

**关键词:**半参数模型;平滑因子; $L$ -曲线法

中图分类号: P207

半参数模型是 20 世纪 80 年代初发展起来的一种新的回归模型,它是将信号视为非随机参数,采用补偿最小二乘法,得到参数和信号的估值。半参数模型在模型精化和减弱系统误差方面得到了广泛的应用<sup>[1~3]</sup>。

解算半参数模型有正则化矩阵  $R$  的选取和平滑因子  $a$  的确定两个关键问题。本文在选取正则化矩阵  $R = G^T G^{-1}$  的基础上,重点研究了不同的平滑因子对参数估值的影响。确定平滑因子的方法有多种,如偏差原理法、GCV 法、 $L$ -曲线法等,其中比较好的方法是  $L$ -曲线法<sup>[4~5]</sup>。Fischer 首先应用半参数模型和  $L$ -曲线法对拟合推估问题进行了研究,得到了有益的结论<sup>[1~2]</sup>。文献<sup>[3]</sup>在信号满足  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$  的条件下,推导了相应的半参数模型计算公式。

## 1 模型说明及 $L$ -曲线法的基本原理

### 1.1 模型说明

半参数模型为:

$$L = A X + S + \Delta \quad (1)$$

相应的估计准则为:

$$V^T \sum_{\Delta}^{-1} V + a S^T R S = \min \quad (2)$$

式中,  $L$  是观测值;  $\Delta$  是噪声,服从分布  $N(0,$

$\sum_{\Delta})$ ;  $X$  为确定性未知量;  $A$  为系数阵;  $V$  为残差;  $S$  为信号,是非随机未知量;  $a$  为平滑因子;  $R$  为正则化矩阵。

Fischer 教授基于半参数模型(1)和估计准则(2)推导的计算公式参见文献<sup>[1]</sup>。孙海燕在信号满足  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$  的条件下,基于半参数模型和估计准则推导的计算公式见文献<sup>[3]</sup>。这两套计算公式的主要区别在于后者附加了条件  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$ 。

### 1.2 用 $L$ -曲线法确定平滑因子 $a$ 的基本原理

根据  $S$  和  $V$  可以构造以下两个以  $\alpha$  为自变量的加权范数:

$$SN(\alpha) = S^T(\alpha) R S(\alpha) \quad (3)$$

$$NN(\alpha) = V^T(\alpha) P_{\Delta} V(\alpha) \quad (4)$$

根据不同的  $\alpha$ , 就可以得到不同的  $SN(\alpha)$ 、 $NN(\alpha)$ 。以  $SN$  为横坐标、 $NN$  为纵坐标画图,可得到许多点  $(SN(\alpha), NN(\alpha))$ , 将这些点进行曲线拟合得到一条新曲线。这条曲线像“ $L$ ”, 利用这条曲线来确定平滑因子的方法被称为  $L$ -曲线法。利用  $L$ -曲线法选择平滑因子的关键是如何定位  $L$ -曲线上的最优点, 本文采用最短距离来定位  $L$ -曲线上的最优点。

用  $L$ -曲线法确定平滑因子  $\alpha$  的计算步骤如下。

1) 通过黄金搜索算法确定  $\alpha$  的取值范围<sup>[6]</sup>。

2) 在该范围内选取不同的  $\alpha$  值进行试算。取不同的  $\alpha$  值, 按照文献[1]中的公式进行计算, 得到不同的  $SN(\alpha)$ 、 $NN(\alpha)$ 。根据得到的数值对, 以  $SN$  为横坐标、 $NN$  为纵坐标画图, 可以得到许多离散的点。根据这些点进行曲线拟合, 求出曲线上离原点距离最近的点, 这个点所对应的  $\alpha$  值就是利用  $L$ -曲线上确定的平滑因子。

## 2 算例及其分析

采用文献[3]中的模拟算例。模拟的线性模型是  $Y_1 = BX$ , 并取  $X = [2 \quad 3]^T$ 。 $B(b_{ij})$  为  $100 \times 2$  阶矩阵,  $b_{i1} = i/20$ ,  $b_{i2} = (i/20)^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, 100$ 。模拟的信号是  $Y_2 = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{100}]^T$ ,  $y_i = 10\sin(t_i)$ ,  $t_i = 2(i-1)\pi/100$ ,  $i = 1, 2, \dots, 100$ 。模拟观测噪声的协方差阵为  $D_\Delta = I$ ,  $I$  为 100 阶单位阵。待求的参数是两个确定性参数和模拟的信号。正则化矩阵  $R$  按照文献[1]选取。这里为了说明平滑因子  $\alpha$  的作用, 设计了以下 3 种计算方案。

- 1) 文献[1]中的正则化矩阵结合  $L$ -曲线法;
  - 2) 文献[3]中的计算公式结合  $L$ -曲线法, 应用  $L$ -曲线法确定的平滑因子为  $\alpha = 1.0471$ ;
  - 3) 文献[3]中的计算公式, 取  $\alpha = 0.05$ 。
- 3 种方案计算的信号估值与模拟信号真值的比较见图 1。3 种方案计算的信号估值与信号真值差异的比较见表 1。

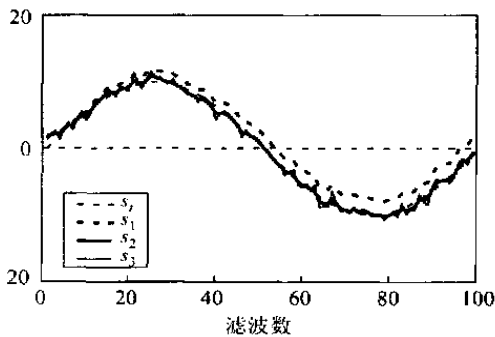


图 1 3 种方案计算的信号估值与信号真值的比较

Fig. 1 Comparisons Between Estimated Value and True Value of the Signal

表 1 3 种方案计算的  $S$  估值差异的比较

Tab. 1 Difference Comparison of  $S$  Estimation Values Among Three Schemes

$\Delta S_1^T \Delta S_1$	$\Delta S_2^T \Delta S_2$	$\Delta S_3^T \Delta S_3$
325.541 5	20.709 2	63.595 6

从图 1 和表 1 可以看出, 方案(2)的信号估值明显好于其他两种方案。方案(2)优于方案(1)的

原因在于附加了条件  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$ ; 优于方案(3)的原因在于用  $L$ -曲线法确定了合适的平滑因子。

3 种方案求解的  $X$  估值的比较见表 2。

表 2 3 种方案计算的  $X$  估值的比较

Tab. 2 Comparison Between Estimated Values of  $X$  from Three Schemes

$X_i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
2.000 0	1.041 6	2.039 7	1.999 7
3.000 0	3.097 4	2.994 9	3.006 8

3 种方案计算的  $X$  估值与模拟  $X$  真值差异的比较见表 3。

表 3 3 种方案计算的  $X$  估值的差异的比较

Tab. 3 Difference Between Estimated Values of  $X$  from Three Schemes

$\Delta X_1^T \Delta X_1$	$\Delta X_2^T \Delta X_2$	$\Delta X_3^T \Delta X_3$
0.928 0	0.001 6	0.000 0

从表 2 和表 3 看出, 方案(2)与方案(3)  $X$  估值的精度基本上相当, 都明显优于方案(1)。这说明在信号满足  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$  时, 附加这个条件相当于增多了信息, 可以提高参数估值的精度。

在以上图表中,  $X_i$ 、 $S_i$  表示真值;  $X_1$ 、 $S_1$  表示用方案(1)求解的  $X$ 、 $S$  的估值;  $X_2$ 、 $S_2$  表示用方案(2)求解的  $X$ 、 $S$  的估值;  $X_3$ 、 $S_3$  表示用方案(3)求解的  $X$ 、 $S$  的估值;  $\Delta X_i = X_i - X_i$ ,  $\Delta S_i = S_i - S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )。

## 3 结 语

1) 用  $L$ -曲线法可以确定合适的平滑因子  $\alpha$ , 通过这个平滑因子的作用, 可以提高参数和信号估值的精度。

2) 在解算半参数模型时, 如果信号满足条件  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$ , 则要附加这个约束条件。附加这个条件可以明显地提高信号估值的质量。

## 参 考 文 献

- 1 Fischer B. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression(Part I). ZfV, 1999, 1(1): 17~24
- 2 Fischer B. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression(Part II). ZfV, 1999, 1(2): 46~52
- 3 孙海燕, 吴云. 半参数回归与模型精化. 武汉大学学报·信息科学版, 2002, 27(2): 172~174
- 4 Hansen P C. Analysis of Discrete Ill-posed Problems by

Means of the  $L$ -curve. SIAM Rev., 1992, 34(4): 561 ~ 580

- 5 Hansen P C, O' Leary D P. The Use of the  $L$ -curve in the Regularization of Discrete Ill-posed Problems. SIAM J. Sci. Comp., 1993, 14(6): 1 487 ~ 1 503

6 Press W H. Numerical Recipes. Cambridge: Cambridge University Press 1986

第一作者简介: 王振杰, 副教授, 博士生。现主要从事大地测量不适定问题的研究。

## Determining the Smoothing Parameter in Semi-parametric Model Using $L$ -curve Method

WANG Zhenjie<sup>1,2</sup> OU Jikun<sup>1</sup> QU Guoqing<sup>2</sup> HAN Baomin<sup>2</sup>

(1 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences,

174 Xudong Road, Wuhan 430077, China)

(2 Faculty of Architectural Engineering, Shandong University of Technology,

12 Zhangzhou Road, Zibo 255012, China)

**Abstract:** There are two crucial steps in resolving semi-parametric model. One is to choose the regularizer, and the other is to determine the smoothing parameter. The emphasis of this paper is on the determination of the smoothing parameter. A new method for determining smoothing parameter,  $L$ -curve method, is investigated. On the basis of analyzing the basic theorem of  $L$ -curve, the authors realize its algorithm and apply it to the mitigation of systematic errors. Furthermore, we combine the  $L$ -curve with different methods to resolve the semi-parametric model and compare their results.

**Key words:** semi-parametric model; smoothing parameter;  $L$ -curve method

**About the first author:** WANG Zhenjie, associate professor, Ph. D candidate. He is mainly engaged in the research on the ill-posed problems in geodesy.

(责任编辑: 光远)

### 欢迎订阅《测绘信息与工程》

《测绘信息与工程》为测绘专业应用技术期刊,其宗旨是:贯彻从生产中来、到生产中去的办刊原则,面向测绘行业发展的实际需要,发表对测绘行业具有直接指导作用的技术、管理和教育文章,架设沟通测绘研究与应用联系的桥梁,普及测绘科学新技术,提高测绘行业的技术含量及从业人员的技术水平。本刊开辟的栏目均面向读者需要,并已形成特色和优势,具有较好的社会适应性。本刊为湖北省优秀期刊。

本刊国内外公开发行,读者对象为测绘及相关专业的技术人员、管理人员、教育人员以及大学生、研究生等。本刊为双月刊, A4 开本, 56 面, 逢双月 5 日出版, 每册定价 4.0 元, 邮购价加 25%。本刊邮发代号: 38-316, 请广大读者到各地邮局订阅。漏订者可与本刊编辑部联系补订。