DOI:10.13203/j.whugis2004.07.017
第29卷 第7期　武汉大学学报·信息科学版　Vol.29 No.7
2004年7月　Geomatics and Information Science of Wuhan University　July 2004

文章编号:1671-8860(2004)07-0635-03　文献标识码:A

重力场 Dirichlet 问题解的随机 Poisson 积分表示

邓 波[1]　朱灼文[1]　陆 中[2]

(1 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路129号,430079)
(2 香港大学土木工程系,香港港岛薄扶林道)

摘 要:在球近似下,顾及到庞大复杂的边界数据,借助重力场随机模型框架,直接给出了调和重力随机场 Dirichlet 问题解的随机积分表达式——随机 Poisson 积分式,并讨论了这个广义随机泛函与经典 Poisson 积分表达式的关系。

关键词:重力场;Dirichlet 问题;随机 Poisson 积分
中图法分类号:P223.0

近几年来,地球表面及来自空间卫星地面观测的大量数据(如高精度重力测量、卫星测高、卫星跟踪卫星等)已得到了广泛的使用。从理论上看,地球重力学中的许多经典边值问题从属性上发生了相当大的变化。自20世纪80年代以来,超定边值问题、非线性边值问题、随机边值问题等新型边值问题理论和方法的研究已经取得了不小的进步,但如何进一步完善与发展,仍亟待深入研究[1~3]。总之,新型边值问题特别是随机边值问题已成为当今大地测量学的研究热点之一[4,5]。

本文就重力学 Dirichlet 问题,在经典 Poisson 积分表达式的基础上,以广义随机泛函的形式直接给出了随机模型下 Dirichlet 问题解的 Poisson 积分表达式,并给出了简单证明。

1 经典 Dirichlet 问题的积分解

在充分光滑的条件下,球近似情况重力学经典 Dirichlet 问题解的封闭形式可以写成球面坐标形式的 Poisson 积分:

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{\rho_0^2-R^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1}$$

式中,u 是位函数;$(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$是在地球外域的参变中点 M_0 的球坐标;(R,θ,φ)是地球表面上积分流动点 P 的球坐标;$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$。

这种积分解式可以用球谐函数级数展开方法或 Green 函数法求得,当然通过其他方法也可以得到[6,7]。

2 广义函数理论框架下 Poisson 公式的直接推广

目前,用广义函数对球外 Dirichlet 问题进行表述已有研究[8,9],而根据随机偏微分方程理论本身的要求,必须先对解的泛函空间给予重新阐述。以下将经典偏微分方程广义泛函空间推广到概率空间上,即将地球外部重力场看成是广义随机函数。

2.1 随机 Sobolev 空间

采用广义随机泛函的概念,从根本上克服了由混沌边界以及奇异点等相关问题带来的困难,将复杂问题转化到一个比较好的函数空间上(检验函数空间),从而有效地从实际出发给出了比较理想的结果。对于调和随机场重力边值问题,同样采用广义随机泛函。这里首先要考虑两个问题,即空间的完备性和 Poisson 积分核。下面引入随机 Sobolev 空间的概念。

收稿日期:2004-04-15。
项目来源:国家教育部高等学校博士点专项基金资助项目(2000049802);地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(905276031-11);测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目((00)0203);国家测绘局测绘科技发展基金资助项目(20010103)。

首先给出需要的检验函数空间。记 $\Gamma=\partial\Omega$，即地球的表面，并近似地将其看作球面，Ω 是地球外部空间区域，$H_2^2(\Omega)$是经典 Sobolev 空间。记 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$，$X=C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$作为检验函数空间，它是空间 $C_0^{\infty}(\Omega)$的闭包。用傅立叶变换定义检验函数 $\varphi\in X$ 的范数是：

$$\|\varphi\|_{-2}^2\approx\int|\varphi(\lambda)|^2(1+|\lambda|^2)^{-2}\mathrm{d}\lambda \quad (2)$$

式中，$\varphi(\lambda)$是 φ 的傅立叶变换。式(2)的确切涵义参见文献[9]中关于 $H_2^2(\Omega)$的范数定义。于是得到一个完备的检验函数空间，也就是 Sobolev 空间 $X=W_2^{-2}(\overline{\Omega})$。

定义：定义 $\xi\in D^*$ 为外部重力场随机函数(定常随机场)，也可以记为如下的分布形式：

$$\xi=(\xi,\varphi),\ \varphi\in X$$

它是空间 $X=W_2^{-2}(\overline{\Omega})$上的广义随机泛函，其中 φ 的范数是 $\|\varphi\|_{-2}$；D^* 为空间 $X=C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$的对偶空间。进而用下列均方值定义随机泛函$(\xi,\varphi)$的范数：

$$\|(\varphi,\xi)\|^2=E|(\varphi,\xi)|^2,\ \varphi\in D \quad (3)$$

于是得到了一个完备的 Hilbert 空间，它是一个随机泛函类 $H_2^2(\overline{\Omega})$，称为随机 Sobolev 空间。

2.2 调和随机场 Laplace 方程

考察泛定方程——Laplace 方程：

$$\Delta\xi=0 \quad (4)$$

令随机泛函 ξ 是重力场调和函数的解，它应当属于随机调和函数类 Sobolev 空间 $H_2^2(\overline{\Omega})$中的元素。由于此泛函在边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 上的混沌状态，因此可以用随机 Poisson 方程

$$\Delta\xi=\eta \quad (5)$$

来描述广义随机场函数 ξ。式中，η 是 Ω 上的白噪声随机源。η 的范数定义为：

$$E|(\varphi,\eta)|^2\leqslant C\|\varphi\|_2^2,\ \varphi\in C_0^{\infty} \quad (6)$$

于是 η 相对于检验函数 φ 是均方连续的。

利用带边界的完备化空间的性质，同时由文献[4]可知，对于第一类边界条件，即 Dirichlet 条件，可以在边界上取检验函数子空间为：

$$X^+(\Gamma)=W_2^{-3/2}(\Gamma)\times\delta^{(0)}$$

将检验函数分解为直和形式：

$$X(\overline{\Omega})=\Delta L_2(\Omega)\oplus X^+(\Gamma)$$

于是调和随机场的 Dirichlet 问题可以叙述为：在随机 Sobolev 空间 $H_2^2(\overline{\Omega})$中，求解下列随机 Laplace 方程：

$$\begin{cases}(\Delta\xi,\varphi)=(\xi,\Delta\varphi)=0,\ \varphi\in X\\(x,\xi)=(x,\xi_+),\ x\in X^+(\Gamma)\end{cases} \quad (7)$$

式中，总体检验函数空间 $X=C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$。

对任意给定的随机边界条件$(x,\xi)=(x,\xi_+)$，$x\in X^+(\Gamma)$，当且仅当 $X^+(\Gamma)$是子空间 $\Delta L_2(\Omega)$的直补空间时，方程(7)有惟一解 $\xi\in \underline{W}_2^2(\Omega)$。

一方面，因为检验函数空间是完备的，根据 Weierstrass 定理，对任意的 $x\in\Omega$，总可以选取一个检验函数序列 $\varphi\in X$，使得$(x,\xi)=\lim(\varphi,\xi)$，这里 $\varphi\rightarrow x$，$\varphi\in D$。因此，利用函数空间的对偶关系，随机分布 ξ 可描述为一组调和函数序列的极限。即可以通过寻找一组完备基，从而构造出球外调和函数序列，使得这组基在概率 1 意义下向混沌边界逼近。另一方面，考虑随机泛函在无穷远处的正则性，不难得到与经典问题同样的存在性和惟一性结论。因此，问题(7)的一般解为：

$$(\varphi,\xi)=(x,\xi_+),\ \varphi\in X(\Omega) \quad (8)$$

式中，$x\in X^+(\Gamma)$是检验函数 $\varphi\in X(\Omega)$到边界子空间 $X^+(\Gamma)$上的正投影；$\xi_+\in W_2^{-2}(\Omega)$是作为边值的边界随机样本。

通过以上讨论可以得出，对于随机调和重力场分布 ξ，满足随机偏微分方程(5)，当边界检验函数空间选择合适，在概率 1 意义下，方程解的存在性和惟一性均得到满足。因此，只要能够找到一个合适的解的表达式，则必为所求的方程的解，其形式应当是一个随机函数的形式，在定常意义下，则是一个随机积分。

2.3 随机 Laplace 方程的 Poisson 积分表达式

以下在球近似下，直接给出随机 Laplace 方程的 Poisson 积分表达式，它是一个广义随机积分的形式。

定理：对于上述随机 Dirichlet 问题，设球外随机调和函数 $u(P_0)$是球外随机调和场中任意一点 $P_0(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$的扰动重力位，$u(P_0)\in H_2^2(\overline{\Omega})$，有：

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma}u_+(P)\frac{\rho_0^2-R^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}S_P \quad (9)$$

式中，$P_0(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$是球外任意一点的坐标；$u_+(P)$是表面 Γ上的随机样本函数；$\mathrm{d}S_P$ 是关于球面上流动点 P 的面积元素。这个随机函数称为随机 Poisson 积分。

上述积分用球坐标表示为：

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u_+(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{\rho_0^2-R^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \quad (10)$$

式中, $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$是地球外空间中任一固定点 P_0 的坐标; (R, θ, φ)是地球表面上流动点 P 的坐标; $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$; $u_+(R, \theta, \varphi)$是地球表面 Γ上的随机样本函数, 同式(1)中的 $u(R, \theta, \varphi)$有本质的区别, 后者是确定性模型下具体的球面函数, 可看成是经数值处理后的真值代入到方程(1), 而 $u_+(R, \theta, \varphi)$包含了随机因素, 是在随机场框架下直接考虑问题的结果。

欲验明上述随机积分在球外是调和的, 这个随机场的直接解只需考察以下事实即可。

1) 上面随机积分在球外调和是显然的。

2) 其中积分核实质上就是一个二维 Dirac 函数。

事实上,

$$\lim_{\rho_0 \to R}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 1, & (\varphi_P, \theta_P) \in [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{11}$$

若先去掉无穷远正则性条件, 确定性常数函数 $\xi \equiv 1$为 $\xi_+ = 1$ 边界的调和解, 于是有:

$$1 = -\frac{1}{4\pi R}\iint_\Gamma \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}S_P \tag{12}$$

为了方便, 将表达式

$$-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}} \tag{13}$$

记为 $*$, 那么就有下列等式成立:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} * = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} * - \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]-[\varphi_1,\varphi_2]\times[\theta_1,\theta_2]} * = 1 - \int * \to 1 \tag{14}$$

由此可见,

$$-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}} \to \delta(\varphi - \varphi_P, \theta - \theta_P) \tag{15}$$

是二维 Dirac 函数。

3) 存在一个常数 C, $\forall \varphi_1$、$\varphi_2 \in [0, 2\pi]$, θ_1、$\theta_2 \in [0, \pi]$, 有:

$$\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right| \leqslant C \tag{16}$$

2.4　其他讨论

确定性问题是上述随机模型在概率 1 意义下的一种特殊情形。进一步说, 任何一个样本现实, 亦即随机场 $u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$任意截口的一个现实都将回到经典 Poisson 积分形式(1)。由此可见, 这种模型具有一般性。

另外, 由于上述积分式已经实现了逐点行为刻画, 这就避免了在边界子空间上广义随机泛函比较抽象的定义, 从而使对这个随机积分解进行统计分析成为可能。

3　结　语

以往在解重力学边值问题时, 对来自各种渠道的数据的统计处理都需要在解方程之前完成。换句话说, 各种边值都是在认定为真的情况下, 代入边界条件微分方程的。显然, 本文给出了随机方程的相应的 Poisson 积分解式, 统计工作在后, 而且是用广义随机泛函的形式给出的。经典问题的 Poisson 积分解是这个随机积分的一种特殊形式。

参　考　文　献

1　朱灼文, 于锦海. 超定大地边值问题的准解. 中国科学(B 辑), 1992(1): 103 ~ 112

2　Sacerdote F, Sanso F. Overdetermined Boundary Value Problems in Physical Geodesy. Manuscripta Geodaetica, 1985, 10: 195 ~ 207

3　Sanso F. The Wiener Integral and the Overdetermined Boundary Value Problems of the Physical Geodesy. Manuscripta Geodaetica, 1988, 13: 75 ~ 98

4　Sanso F, Rummel R. Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid. New York: Springer, 1997

5　刘经南, 罗志才, 李建成. 从第 22 届 IUGG 大会看现代大地测量的进展. 武汉测绘科技大学学报, 2000, 25(1): 12 ~ 17

6　海斯卡涅 W A, 莫里兹 H. 物理大地测量学. 卢福康, 胡国理译. 北京: 测绘出版社, 1984

7　莫里兹 H. 高等物理大地测量. 宁津生, 管泽霖译. 北京: 测绘出版社, 1984

8　郭友中. 数学物理方法. 武汉: 武汉大学出版社, 1993

9　王耀东. 偏微分方程的 L^2 理论. 北京: 北京大学出版社, 1989

第一作者简介: 邓波, 讲师, 博士生。现主要从事调和随机场理论研究。

(下转第 657 页)

Deducing and Estimating Nonparametric Signal in Semiparametric Regression Model

——Method of Cubic Splines Interpolation

HU Hongchang[1, 2]　*SUN Haiyan*[1]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Department of Mathematics, Hubei Normal University, Shenjiaying, Huangshi 435002, China)

Abstract: This paper considers the semiparametric regression model $y_i = \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\beta + s(t_i) + e_i$ (for $i = 1, 2, \cdots, n$). Where $s_i = s(t_i)$ denotes the nonparametric signal of the observation and y_i a number relating to the observation at t_i, $\boldsymbol{X}_i \in R^p$ $(n > p)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_p)^{\mathrm{T}}$ is parameter vector with p denoting the number of parameters, e_i denotes the noise and is assumed to be independently $N(0, \sigma_i^2)$ distributed.

Key words: semiparametric regression model; cubic spline function; deduce and estimate

About the first author: HU Hongchang, lecturer, Ph. D candidate. He is mainly engaged in the research on the theory and application of surveying data processing. His typical achievement is parameter σ estimation of p \| norm distribution.

E-mail: retutome@yeah.net

(责任编辑: 光远)

(上接第 637 页)

Stochastic Poisson Integral of Dirichlet Problem for Gravity Field

DENG Bo[1]　*ZHU Zhuowen*[1]　*LU Zhong*[2]

(1　Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulan Road, Hong Kong)

Abstract: In order to solve the boundary value problem with chaos or complicated boundary dates, such as singularity etc., it is necessary to establish the model of stochastic partial differential equation for the gravity field. This paper first constructs the conception of stochastic Sobolev spaces $H_2^2(\overline{\Omega})$, then gives the stochastic Poisson integral as a generalized stochastic functional, and compares the relationships between stochastic model and determined model of Poisson integral, and indicates that determined model is just one of the special situations of stochastic Poisson integral.

Key words: gravity field; dirichlet problem; stochastic Poisson integral

About the first author: DENG Bo, lecturer, Ph. D candidate. His major research orientation is the theory of stochastic model of geodetic boundary value problems.

(责任编辑: 平子)