DOI :10.13203/j.whugis2004.05.001
第29卷 第5期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 29 No. 5
2004年5月 Geomatics and Information Science of Wuhan University May 2004

文章编号: 1671-8860(2004)05-0377-03 文献标识码: A

地球重力场、重力、重力梯度在三维直角坐标系中的表达式

陈俊勇[1]

(1 国家测绘局办公室, 北京市百万庄, 100830)

摘 要: 现代卫星重力测量主要利用星载GPS接收机、加速度计、星载测距仪等来确定重力卫星的轨道, 削弱非保守力的干扰, 由此根据卫星的位置、速度及其变率来确定地球重力场。而上述GPS等星载仪器所提供的数据, 包括卫星轨道坐标及其速率、扰动加速度、星间距离及其变率, 都是以三维直角坐标(x, y, z)的形式表示的, 因此, 地球重力场、重力和重力梯度在三维直角坐标系中的表达式在卫星重力解算中具有实际意义。

关键词: 地球重力场; 重力; 重力梯度; 三维直角坐标系

中图法分类号: P223.0; P223.6

近年来, 卫星重力测量的实践证明了它在求定地球重力场, 特别是中、长波长方面的重要作用。这些新一代卫星重力测量项目与以往不同的重要特点, 就是利用星载GPS接收机、K波段测距仪等来确定重力卫星的轨道及其位置、速度和它们的变率, 通过星载加速度计数据来排除非保守力对卫星轨道的扰动, 综合利用这些数据就可以推算地球重力场。这些星载仪器所提供的数据包括卫星轨道坐标及其速率, 通常都是以(地心)三维直角坐标的形式表示的。因此, 导出地球重力场、重力和重力梯度在三维直角坐标系中的表达式, 在卫星重力解算中具有实际意义。本文所推导的公式都是相应于ITRF定义下的地心地固三维直角坐标系的, 以下简称为三维直角坐标系。

1 地球重力场在球坐标系和三维直角坐标系中的表达式

众所周知, 地球重力场在球坐标系中的表示式 $U(\lambda, \varphi, r)$为[1]:

$$U(\lambda, \varphi, r)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(c_{n,m}\cos(m\lambda)+s_{n,m}\sin(m\lambda))P_{n,m}(\sin\varphi) \quad (1)$$

式中, λ、φ、r 是点的球坐标; GM 是地心引力常数; R 是地球平均半径; $P_{n,m}(\sin\varphi)$是完全规格化的 n 阶 m 次勒让德函数; $c_{n,m}$ 和 $s_{n,m}$ 是地球重力场的完全规格化的球谐函数的系数。相应于式(1), 地球重力场在三维直角坐标系中的表达式为[2]:

$$U(x, y, z)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}R^{n}\sum_{m=0}^{n}n_{n,m}\sum_{k=0}^{(n-m)/2}b_{n,m,k}z^{n-m-2k}(x^2+y^2+z^2)^{k-n-1/2}\cdot\left\{c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^{i}\binom{m}{2i}x^{m-2i}y^{2i}+s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^{i}\binom{m}{2i+1}x^{m-(2i+1)}y^{2i+1}\right\} \quad (2)$$

式中, $b_{n,m,k}=$

$$(-1)^{k}\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} \quad (3)$$

$n_{n,m}$表示使勒让德函数完全规格化的乘因子[3], 即 $P_{n,m}(t)= n_{n,m}\underline{P_{n,m}(t)}$, $P_{n,m}(t)$是完全规格化的勒让德函数, 而$\underline{P_{n,m}(t)}$则表示未规格化的勒让德函数; 其他各符号的意义与式(1)相同。

2 重力矢量在三维直角坐标系中的表达式

根据地球重力场可导出重力矢量 $\boldsymbol{g}$ 在地心地固坐标系中的三维直角坐标表示式为:

收稿日期: 2004-02-01。

$$g(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}e_x + \frac{\partial U}{\partial y}e_y + \frac{\partial U}{\partial z}e_z = g_x e_x + g_y e_y + g_z e_z \tag{4}$$

式中，e_x、e_y、e_z 分别表示 x、y、z 坐标轴上的单位矢量。

按式(4)对式(2)求导，可以得到重力矢量 g 在 x、y、z 三个轴上的分量分别为：

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^{n-m-2k}(x^2+y^2+z^2)^{k-n-1/2}\left\{c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i\binom{m}{2i}\cdot y^{2i}[(m-2i)x^{m-2i-1} + (2k-2n-1)x^{m-2i-1}(x^2+y^2+z^2)^{-1}] + s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i\cdot \binom{m}{2i+1} y^{2i}[(m-2i-1)x^{m-2i-2} + (2k-2n-1)x^{m-2i}(x^2+y^2+z^2)^{-1}]\right\} \tag{5}$$

$$g_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^{n-m-2k}(x^2+y^2+z^2)^{k-n-1/2}\left\{c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i\binom{m}{2i}\cdot x^{m-2i}[2iy^{2i-1} + (2k-2n-1)y^{2i+1}(x^2+y^2+z^2)^{-1}] + s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i\binom{m}{2i+1}\cdot x^{m-2i-1}[(2i+1)y^{2i} + (2k-2n-1)y^{2i+2}(x^2+y^2+z^2)^{-1} \setminus]\right\} \tag{6}$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^{n-m-2k-1}(x^2+y^2+z^2)^{k-n-1/2}[(n-m-2k) + (2k-2n-1)z^2(x^2+y^2+z^2)^{-1}]\left[c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i\binom{m}{2i} x^{m-2i}y^{2i} + s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i\binom{m}{2i+1} x^{m-2i-1}y^{2i+1}\right] \tag{7}$$

设 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，$p=2k-2n-1$，$q=m-2i$，$t=n-m-2k$，将式(5)~式(7)合并可写成：

$$g(x, y, z) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^t r^p\left[c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i\binom{m}{2i}\cdot [y^{2i}(qx^{q-1} + px^{q+1}r^{-2})e_x + x^q(2iy^{2i-1} + py^{2i+1}r^{-2})e_y + x^q y^{2i} z^{-1}(t + pz^2r^{-2})e_z] + s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i\binom{m}{2i+1}[y^{2i+1}((q-1)x^{q-2} + px^q r^{-2})e_x + x^{q-1}((2i+1)y^{2i} + py^{2i+2}r^{-2}e_y + x^{q-1}y^{2i+1}z^{-1}(t+pz^2r^{-2})e_z]\right] \tag{8}$$

根据式(8)可以导出考虑点的垂线偏差，但要作进一步的坐标变换，这里不作详细推导。

3 重力梯度矢量 ∇g 在三维直角坐标系中的表达式

重力梯度矢量 ∇g 在地心地固坐标系中的三维直角坐标表示式为：

$$\nabla g(x, y, z) = \nabla g_x e_x + \nabla g_y e_y + \nabla g_z e_z \tag{9}$$

式中，∇g_x、∇g_y、∇g_z 可通过对式(2)的重力位 U 求二阶导数得到：

$$\begin{aligned} \nabla g_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} \\ \nabla g_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} \\ \nabla g_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} \end{aligned} \tag{10}$$

将 ∇g_x、∇g_y、∇g_z 详细写为：

$$\nabla g_x = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^t r^p\left[c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i x^q y^{2i}\binom{m}{2i}[p(2q+1)r^{-2} + q(q-1)x^{-2} + p(p-2)x^2r^{-4} + 2ipxy^{-1}r^{-2} + 2iqx^{-1}y^{-1} + p(p-2)xyr^{-4} + qpx^{-1}yr^{-2} + tpxz^{-1}r^{-2} + tqx^{-1}z^{-1} + p(p-2)xz^{-1}r^{-4} + qpx^{-1}z^{-1}r^{-2}] + s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i x^q y^{2i}\binom{m}{2i+1}[p(q-1)x^{-1}yr^{-2} + (q-1)(q-2)x^{-3}y + p(p-2)xyr^{-4} + \right.$$

$$qpx^{-1}yr^{-2}+p(2i+1)r^{-2}+(2i+1)(q-1)x^{-2}+p(p-2)y^2r^{-4}+p(q-1)x^{-2}y^2r^{-2}+$$
$$tpyz^{-1}r^{-2}+t(q-1)x^{-2}yz^{-1}+p(p-2)yz^{-1}r^{-4}+p(q-1)x^{-2}yz^{-1}r^{-2}]\Bigg] \tag{11}$$

$$\nabla g_y=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}R^n\sum_{m=0}^{n}n_{n,m}\sum_{k=0}^{(n-m)/2}b_{n,m,k}z^t r^p\Bigg[c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i x^q y^{2i}\binom{m}{2i}[p(4i+1)r^{-2}+2i(2i-1)y^{-2}$$
$$+p(p-2)y^2r^{-4}+2ipxy^{-1}r^{-2}+2iqx^{-1}y^{-1}+p(p-2)xyr^{-4}+qpx^{-1}yr^{-2}+tpyz^{-1}r^{-2}+$$
$$2ity^{-1}z^{-1}+p(p-2)yz^{-1}r^{-4}+2ipy^{-1}z^{-1}r^{-2}]+$$
$$s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i x^{q2i}\binom{m}{2i+1}[2i(2i+1)x^{-1}y^{-1}+p(2i+1)x^{-1}yr^{-2}+p(p-2)x^{-1}y^3r^{-4}+$$
$$p(2i+1)x^{-1}yr^{-2}+p(2i+1)r^{-2}+(2i+1)(q-1)x^{-2}+p(p-2)y^2r^{-4}+p(q-1)x^{-2}y^2r^{-2}+$$
$$t(2i+1)x^{-1}z^{-1}+tpx^{-1}y^2z^{-1}r^{-2}+p(p-2)x^{-1}y^2zr^{-4}+p(2i+1)x^{-1}zr^{-2}]\Bigg] \tag{12}$$

$$\nabla g_z=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}R^n\sum_{m=0}^{n}n_{n,m}\sum_{k=0}^{(n-m)/2}b_{n,m,k}z^t r^p\Bigg[c_{n,m}\sum_{i=0}^{m/2}(-1)^i x^q y^{2i}\binom{m}{2i}[p(t+1)r^{-2}+p(p-2)xzr^{-4}+$$
$$qpx^{-1}zr^{-2}+p(p-2)yzr^{-4}+2ipy^{-1}zr^{-2}-tz^{-2}+p(p-2)z^2r^{-4}]+$$
$$s_{n,m}\sum_{i=0}^{(m-1)/2}(-1)^i x^q y^{2i}\binom{m}{2i+1}[p(p-2)yzr^{-4}+p(q-1)x^{-2}yzr^{-2}+p(p-2)x^{-1}y^2zr^{-4}+$$
$$p(2i+1)x^{-1}zr^{-2}-tx^{-1}yz^{-2}+p(t+1)x^{-1}yr^{-2}+p(p-2)x^{-1}yz^2r^{-4}]\Bigg] \tag{13}$$

参　考　文　献

1 Heishanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Freeman Publishing House, 1969

2 Jarosch M. Darstellung des Gravitationspotentials der Erde in Kartesischen Basisfunktionon. Deutsche Geod. Komm., 1984, 100: 51～65

作者简介：陈俊勇，教授，博士生导师，中国科学院院士。现主要从事大地测量研究，发表论文 140 余篇，出版专著 9 部。

E-mail: jychen@sun.ihep.ac.cn

Expressions of Earth Gravity Field, Gravity and Gravity Gradient in 3D Cartesian Coordinates System

CHEN Junyong[1]

(1 State Bureau of Surveying and Mapping, Baiwanzhuang, Beijing 100830, China)

Abstract: In modern gravity satellite campaigns satellite-based GPS receiver, accelerator, K-band rangefinder etc. are used to measure the orbit of the gravity satellite. From these data earth gravity field can be derived. However, all the information provided by GPS and mentioned satellite-based instruments are in the format of 3D cartesian coordinates. So it is meaningful to derive the expressions of earth gravity field, gravity and gravity gradient in 3D cartesian coordinates system in the determination of earth gravity from the information given by gravity satellites.

Key words: earth gravity field; gravity; gravity gradient; 3D cartesian coordinate system

About the author: CHEN Junyong, professor, Ph. D supervisor, academician of Chinese Academy of Sciences. His research field is geodesy. About 140 papers and 9 works have been published in the name of the 1st author.

E-mail: jychen@sun.ihep.ac.cn

（责任编辑：　平子）