

# 基于小波分析的 Kalman 滤波动态变形模型研究

马攀<sup>1</sup> 孟令奎<sup>1</sup> 文鸿雁<sup>2,3</sup>

(1 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(3 桂林工学院土木工程系, 桂林市建干路 12 号, 541004)

**摘要:** 对 GPS 动态形变测量信号的性质进行了分析, 采用小波分析对 GPS 动态变形数据滤波、变形特征提取和不同变形频率分离。与 Kalman 滤波方法相结合, 首次提出基于小波分析的 Kalman 滤波动态变形分析模型, 研究其参数设计和算法, 并用 MATLAB 与 C 语言在微机上进行编程实现。对比大坝实测数据的处理结果可知, 通过对原始观测值进行小波分析与 Kalman 滤波的联合处理, 能克服只使用单一方法进行 GPS 数据噪声处理的不足。

**关键词:** 小波分析; Kalman 滤波; GPS; 动态变形模型

**中图法分类号:** P228.41; P207

工程建筑物变形分析数据处理理论与方法一直是测绘科学的一个重要研究领域。变形分析数据处理方法的正确与否, 直接影响建筑物安全判定的正确性和可靠性。国内外现有的变形分析模型方法与算法, 其应用效果和应用范围具有一定的局限性。Kalman 滤波是当前应用最广的一种动态数据处理方法, 然而, 在实践中难以满足 Kalman 滤波模型的假设条件<sup>[1]</sup>, 使得 Kalman 滤波模型在实际应用与推广上存在一定的局限性。

建筑物变形实质就是一种随时间或空间变化的信号, 因此, 变形分析可归结为信号分析<sup>[2]</sup>。GPS 动态形变测量信号包含各种频率成分, 对于其中的不确定性噪声, 如白噪声的频率就几乎覆盖整个频率轴<sup>[3]</sup>, 有用信号不易分离, 用传统的小波分析方法很难将其滤除。因此, 本文拟对小波分析与 Kalman 滤波的组合模型用于动态变形数据处理进行探索研究。

## 1 GPS 动态形变测量信号分析

GPS 能够迅速、准确、全天候地提供定位信息, 目前已较为广泛地应用于工程建筑物的动态变形监测。由于 GPS 用于这类监测, 通常情况

下, 其基线布设不会太长(如数 km 以内), 因此, 大气、卫星和接收机相关的误差均可认为在构成差分消除, 但 GPS 信号多路径效应的影响不能通过差分法削弱。此外, 还有温度变化以及残余误差的影响等。所以, 实际测量成果总难以达到预估及规定的精度要求, 如坝区变形监测网要求达到很高的精度, 点位中误差不大于几个 mm。因此, 要有效地测定建筑物的微小形变, 必须正确地将它从这些影响源中分离出来。GPS 动态形变测量信号包含各种频率成分, 但有效信息集中在低频段, 干扰分布在高频段, 因此, 可以通过小波分析提取低频段的有效信息来消除干扰, 对 GPS 观测数据进行预处理。对于经小波预处理后遗留的不确定性噪声等, 再运用 Kalman 滤波方法进行二次信号处理, 以提高变形分析的精度。

## 2 变形分析信号的小波滤波

设  $f(t)$  是观测点变形序列, 采用 Mallat 算法将信号分解成不同频率成分<sup>[4]</sup>:

$$f(t) = A_{j-1}f(t) = A_j f(t) + D_j f(t) \quad (1)$$
式中,  $A_j f(t)$  是信号  $f(t)$  的频率不超过  $2^{-j}$  的成分;  $D_j f(t)$  是频率介于  $2^{-j}$  与  $2^{-j+1}$  之间的成分。

上述小波分解式实际可写成如下的矩阵形式:

$$C_{j+1} = HC_j, D_{j+1} = GC_j (j = 1, 2, \dots, J) \quad (2)$$

式(2)即为 Mallat 塔式分解算法, 式中,  $J$  表示小波分解的层数。其过程表示如图 1 所示, 图中  $2 \downarrow$  表示只取偶数位置的值。

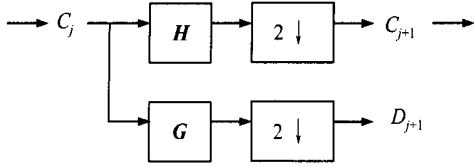


图 1 Mallat 塔式分解算法

Fig. 1 Decomposition Algorithm of Mallat in Pattern-Like Tower

按照 Mallat 算法将  $f(t)$  分解之后, 可以根据经验信息区分信号与噪声, 然后进行滤波形成新序列  $C_j$  和  $D_j$ 。Mallat 重构算法为:

$$C_j = H^* C_{j+1} + G^* D_{j+1} (j = J, J-1, \dots, 1) \quad (3)$$

式中,  $H^*$  和  $G^*$  分别为  $H$  和  $G$  的共轭。其过程表示如图 2 所示, 图中  $\uparrow 2$  表示升样, 即得到的样数为原样数的两倍。

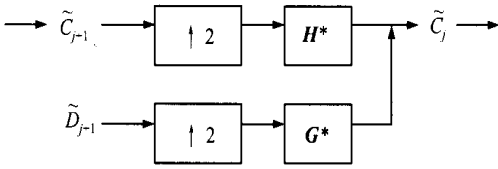


图 2 Mallat 重构算法

Fig. 2 Reconstruction Algorithm of Mallat

如果在信号重构时, 将与噪声相应的高频细节信号有关的部分  $D_j$  去掉, 即得到滤波后的信号<sup>[5]</sup>:

$$f(t) = Af(t) = \sum_{k \in Z} C_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (4)$$

式中,  $f(t)$  是  $f(t)$  经过滤波后的平滑信号表达式, 即相当于用一种光滑曲线对  $f(t)$  进行拟合。通过拟合后的光滑曲线  $f(t)$  即可对变形曲线的规律性进行分析。

### 3 仿真数值试验结果及分析

图 3 为仿真 GPS 动态变形观测数据的时间序列散点图(序列长度为  $K=1790$ )。由于在实际的动态、离散、随机观测系统中, 野外采集的 GPS 动态形变测量信号往往会受到多种不确定性影响因素的干扰(如常见的高频噪声、高频部分的粗差和低频部分的系统偏差项等)。为了更好地模拟实测资料, 在原变形数据序列上叠加一定

的噪声干扰, 即一个随机噪声 ( $N(0, 0.22^2)$ )、均值为 0 而斜率为 0.003 2 的线性趋势项和一正弦周期项。正弦函数用下式模拟:

$$\hat{q} = 3.2 \cdot \sin(2\pi \frac{408 \cdot i}{267 \cdot K} - \pi) \quad (5)$$

式中,  $i=0, 1, \dots, K-1$ 。此外, 信号中的奇异点及不规则的突变部分经常带有比较重要的信息, 它是信号重要的特征之一。为此, 再模拟一些信号突变点  $\xi$ :  $\xi_{i=52}=3 \text{ mm}$ ,  $\xi_{i=131}=5 \text{ mm}$ ,  $\xi_{i=561}=2.8 \text{ mm}$ ,  $\xi_{i=800}=3.5 \text{ mm}$ ,  $\xi_{i=1669}=4 \text{ mm}$ 。此时, 含噪声干扰的模型散点图形如图 4 所示。

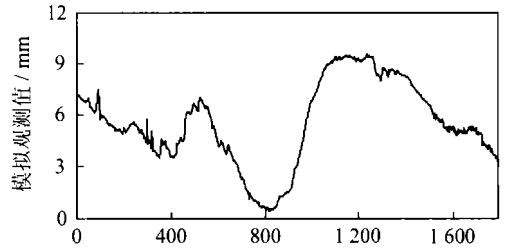


图 3 模拟的原始时间序列散点图

Fig. 3 Raw Data Chart in Time Sequence by Simulation

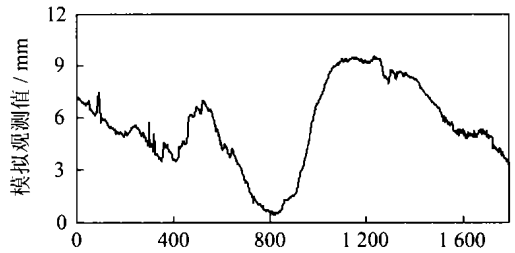


图 4 含噪声干扰的模型散点图

Fig. 4 Analog Data Chart in Noise Interruption

针对上述含有噪声干扰的 GPS 动态变形仿真数据, 用各种小波函数进行处理, 处理后的误差曲线如图 5 所示, 其中误差分别为: Haar 为  $\pm 0.28\text{mm}$ 、db6 为  $\pm 0.17\text{mm}$ 、db10 为  $\pm 0.21\text{mm}$ 、sym6 为  $\pm 0.26\text{mm}$ 、Meyer 为  $\pm 0.34\text{mm}$ 。

小波函数对信号突变点的检测能力(以 Daubechies 小波为例)如图 6 所示。从图 6 可以看到, 在该信号的小波分解中, 第一层 ( $D_1$ ) 和第二层 ( $D_2$ ) 的高频部分将信号的不连续点显示得相当明显。因为信号的突变(断裂)部分包含的是高频部分, 此时对相应的高频分解系数作置零处理, 小波重建原信号后, 即可将突变点的强噪声干扰清除。而且, 信号不连续点的时域定位非常精确, 即这些点在时域中的位置(范围)与模拟信号突变点  $\xi$  的设定位置 ( $\xi_{i=52}$ ,  $\xi_{i=131}$ ,  $\xi_{i=561}$ ,  $\xi_{i=800}$ ,  $\xi_{i=1669}$ ) 对应得相当好, 这种情况一般是在

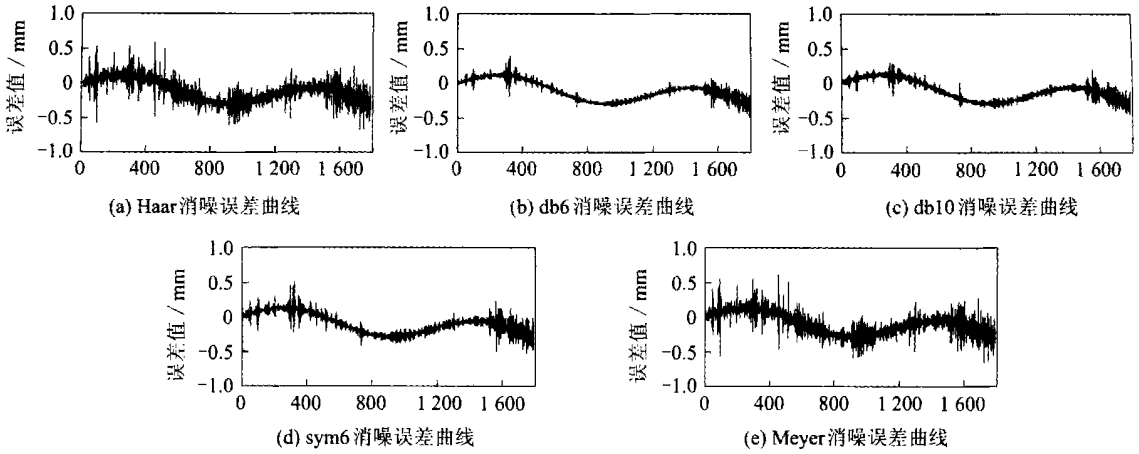


图 5 消噪误差曲线

Fig. 5 Error Curve in Denoising

小波分解的第一层和第二层高频中判断。而模拟的随机噪声通常也表现为高频信号, 这点在小波分解的第三层( $D_3$ )至第五层( $D_5$ )的高频部分得到了很好的体现(如图 6)。

开始失真, 所以取  $C_5$  为经过滤噪处理的 GPS 信号, 同时也说明了模拟的趋势项和正弦周期项包含在小波分解  $C_5$  以前的低频部分中。经小波处理后的 GPS 数据曲线平滑, 噪声大大降低。

在 GPS 变形观测数据的小波多分辨分析中, 本文采用了不同的小波函数和不同阶次的小波进行试验数据处理分析。通过以上的分析结果可以看出, 小波变换可精化、提纯、突出信号固有的特征信息, 以便于识别。经过小波分析对试验数据的处理之后, 模拟的大部分噪声干扰都已被消除, 可用于进一步的 GPS 观测数据的定量分析。但是比较各种小波函数处理试验数据的中误差, 与设定的随机噪声的中误差  $\sigma = \pm 0.22\text{mm}$  很接近, 说明小波分析对白噪声的过滤不是很彻底, 这是由于白噪声的频率几乎覆盖整个频率轴而不易分离引起的。用传统的小波分析方法很难将其滤

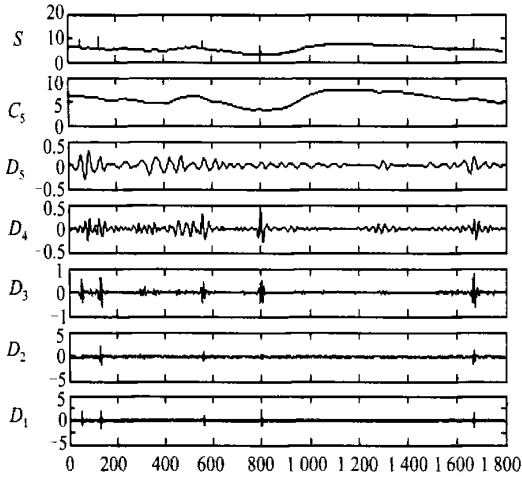


图 6 用 db6 小波分解五层

$$S = C_5 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1$$

Fig. 6 Decomposing  $S = C_5 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1$  to 5 Layers by db6

通过对原信号  $S(C_0)$  进行 6 阶 Daubechies 小波基的 5 层分解,  $C_j$  和  $D_j$  分别显示了每次分解得到的高频和低频成分(如图 6 和图 7 所示)。由于离散小波分析实施了正交线性变换, 原始信号可以表示为任一级离散近似与本级及以前所有级离散细节之和, 即  $C_0 = C_j + D_j + D_{j-1} + \dots + D_1$ 。可以看出, 经过逐次分解, 原始信号中的噪声逐渐被分离到  $D_j$  中去, 而 GPS 信号保留在离散近似  $C_j$  中, 并且信噪比逐渐提高。对于图 7 中的 GPS 信号, 分别在第 4 和第 5 次分解开始有明显的 GPS 信号被滤出, 同时对对应级次的离散细节

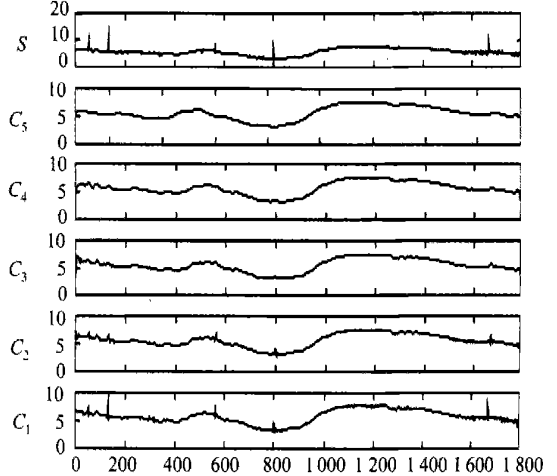


图 7 用 db6 小波分解五层的各层低频部分

Fig. 7 Low Frequency in Decomposing It to 5 Layers by db6

除,要进一步对其分析就比较困难。本文运用 Kalman 滤波方法对小波分析预处理结果进行二次信号处理,以便对分解出来的各个频带内的成分进行更细致的研究,并对变形进行分析和预测,以期取得更好的滤波分析效果。

### 4 试验数据结果及分析

在本次大坝 GPS 动态形变测量数据处理的算例中,对我国 1998 年洪水时期某大坝,用双频 GPS 定位仪器进行垂直于大坝轴线方向位移观测值的小波分析预处理和 Kalman 滤波的后处理。观测历元间隔为 15s,每隔 6h 计算一次,共计 65d 的观测数据。测得的原始观测数据曲线如图 8 所示。

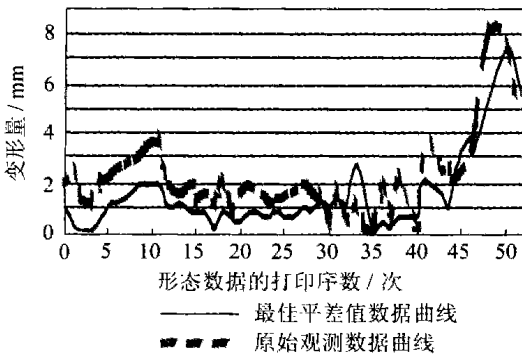


图 8 大坝轴线垂直方向上的实测变形曲线  
Fig. 8 Actual Deformation Chart of Big Dam in Vertical Line to Spool Thread of the Dam

#### 4.2 Kalman 滤波的后处理

运用自编的 Kalman 滤波程序对原始观测值处理后的变形曲线如图 10 所示,对小波分析预处理结果进行二次信号处理的运行结果如图 11 所示。实例计算结果表明, Kalman 滤波直接对原始观测值处理的滤波值中误差为  $\hat{\sigma}_{K1} = \pm 1.42\text{mm}$ ,与小波分析预处理滤波值中误差  $\hat{\sigma}_W = \pm 1.07\text{mm}$  相比,要大很多;而对经过小波分析预处理后的数据进行滤波的中误差为  $\hat{\sigma}_{K2} = \pm 0.84\text{mm}$ ,比  $\hat{\sigma}_W = \pm 1.07\text{mm}$  还要小些,这说明观测数据精度进一步得到提高。

#### 4.3 结果分析

对比图 9、图 10 与图 11 所示的运行结果可知, GPS 观测结果含有丰富的各类影响源信息,其观测值与环境有相当大的关系,特别是多路径效应与周边环境的关系密切。坝区因特殊环境的影响,可能产生明显的干扰信号(如多路径效应

#### 4.1 小波分析预处理

由仿真数值试验结果可知,  $N=6$  的 Daubechies 小波十分适合于 GPS 动态变形观测信号的消噪问题(其小波分解相应的滤波器系数可查表获得)。用小波对此大坝的实测动态变形数据进行预处理,处理后的变形曲线如图 9 所示。

根据求中误差估值的基本公式  $\hat{\sigma} = \pm \sqrt{[\Delta\Delta]/n}$ , 可得算例的观测值中误差  $\hat{\sigma}_S = \pm 1.53\text{mm}$ 。经过  $N=6$  的 Daubechies 小波分析预处理后,其小波分析滤波值中误差为  $\hat{\sigma}_W = \pm 1.07\text{mm}$ 。可见,通过 Daubechies 小波分解与高频去噪处理,对提高实测动态变形观测数据精度的效果是很显著的。

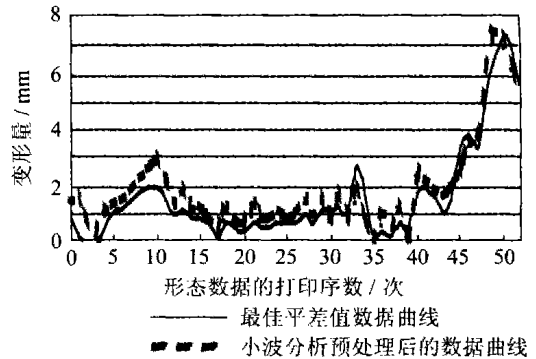


图 9 大坝轴线垂直方向上的形变数据预处理成果图  
Fig. 9 Chart of Previous Processing of Deformation Data for Big Dam in Vertical Line to Spool Thread of the Dam

等)而影响 GPS 观测的质量。因此, Kalman 滤波直接对原始数据的处理结果不是很理想,但其滤波后期较前期的精度要高(图 10),这是因为 Kalman 滤波是一个不断预测修正的过程。从小波分析预处理结果来看(图 9),它比原始观测值的精度提高 30.1%,比 Kalman 滤波直接处理的结果要好,说明仿真数值试验模拟的噪声干扰与坝区观测环境相符。通过 db6 小波的预处理,使得观测信号中的粗差、大部分的高频噪声及系统偏差等预先被滤除,即可最大限度地消除实际应用中 Kalman 滤波的建模误差,使滤波模型能更精确地模拟目标系统的动态变化规律,进而利用 Kalman 滤波对经小波预处理后遗留的不确定性噪声进行后处理,以提高变形分析的精度。图 11 直观地显示出滤波值数据曲线与实际变形趋势吻合得很好, Kalman 滤波后处理的滤波值比原始观测值的精度提高 45.1%,表明该组合变形模型较好地模拟了目标系统的物理变化规律,它们联合

处理的结果对提高并进一步改善实测 GPS 动态变

形观测数据的精度有很显著的效果。

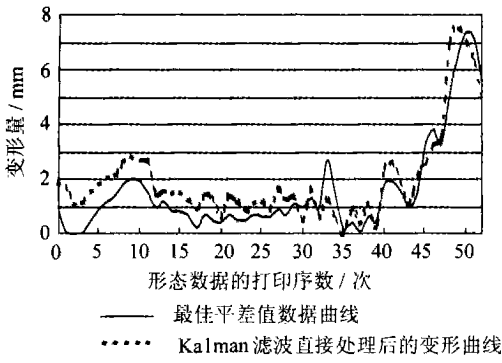


图 10 Kalman 滤波对原始观测值处理后的变形曲线

Fig. 10 Deformation Chart of Raw Data Processed by Kalman Filtering

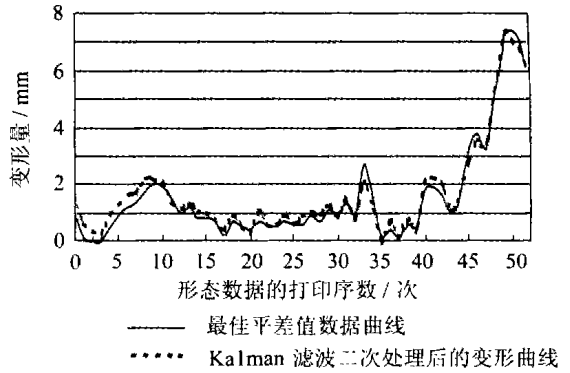


图 11 Kalman 滤波二次处理后的变形曲线

Fig. 11 Deformation Chart of Data Processed by Wavelet Analysis Firstly and by Kalman Filtering Secondly

### 参 考 文 献

- 1 陶本藻. 卡尔曼滤波模型误差的识别. 地壳形变与地震, 1999, 19(4): 15~20
- 2 文鸿雁. 小波多分辨分析在变形分析中的应用. 地壳形变与地震, 2000, 20(3): 27~32
- 3 沈 松, 应怀樵, 刘进明. 小波变换在振动信号分析中的工程解释与应用. 振动、测试与诊断, 2000, 20(4): 259~263

- 4 张湘伟, 骆少明, 中桐滋. 小波分析在测试信号分析中的应用. 应用数学和力学, 1998, 19(3): 203~207
- 5 徐铭陶, 秦树人, 陈志奎, 等. 实施一维 Mallat 算法的几个问题. 重庆大学学报·自然科学版, 1997, 20(1): 7~13

第一作者简介: 马攀, 博士生. 现从事 3S 及工程测量等应用技术研究。

E-mail: mapan163@tom.com

## Kalman Filtering Model of Dynamic Deformation Based on Wavelet Analysis

MA Pan<sup>1</sup> MENG Lingku<sup>1</sup> WEN Hongyan<sup>2,3</sup>

(1 School of Remote Sensing and Information Engineering Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Geodesy and Geomatics Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(3 Department of Civil Engineering, Guilin Institute of Technology, 12 Jiangan Road, Guilin 541004, China)

**Abstract:** By analyzing the data obtained by GPS in dynamic deformation, wavelet analysis is used to filter GPS data of dynamic deformation, distill deformation character and separate different frequency of deformation. Then this paper puts forward the research on Kalman filtering model of dynamic deformation based on wavelet analysis, through combining wavelet analysis with Kalman filtering. The result of the united model is advantageous to enhance and improve GPS data accuracy and its effect is notable, which indicates the superiority to single deformation model.

**Key words:** wavelet analysis; Kalman filtering; GPS; model of dynamic deformation

**About the first author:** MA Pan, Ph. D candidate. His major research is the 3S and engineering surveying application technology.  
E-mail: mapan163@tom.com

(责任编辑: 晓平)