

# 基于二维直接线性变换的数字相机畸变模型的建立

冯文灏<sup>1</sup> 李建松<sup>1</sup> 闫利<sup>2</sup>

(1 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

**摘要:** 提出并论证了基于二维直接线性变换的畸变的校正方法。本方法特别适用于各类固态摄像机(CCD、CID、PSD)的畸变模型的建立, 以补偿各类像点系统误差。

**关键词:** CCD; 二维直接线性变换; 畸变差; 数字畸变模型

**中图分类号:** P246

包含各类畸变差在内的各种像点系统误差的检校是摄影测量工作者的重要工作。在单像空间后方交会法、直接线性变换解法、自检校光线束解法中, 在解算内外方位元素的同时, 可同时解求系统误差模型的参数, 如各类畸变的系数 ( $k_1, k_2, \dots, p_1, p_2, \dots$ ) 或自检校中的附加参数, 也可以使用解析铅垂线法解求上述畸变系数。

文献[1]中的检测光学畸变的简易方法, 采用使用胶片的 120 型普通相机。在普遍使用各类数字相机的今天, 由于 CCD 芯片自身的平度可达  $\pm 1\mu\text{m}$ , 而且不存在“底片变形”问题, 直接预先测定 CCD 相机的光学畸变愈加重要。本文提出的基于二维直接线性变换的畸变差检校方法<sup>[1,2]</sup>, 并不解求这些参数值, 而是直接解求 CCD 芯片上各像素因各种因素(主要是光学畸变)引起的系统误差值。本方法因操作简易, 可针对不同的调焦距测定相应的一系列数字畸变模型, 故特别适用于近距离摄影条件下畸变有剧烈变化的各类变焦数字相机。本理论也适应于多种光学系统畸变数字模型的建立。

## 1 二维直接线性变换及其特点

三维空间的直接线性变换表达式为:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} &= 0 \\ y + \frac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $l_1 \sim l_{11}$  与影像的内方位元素、外方位元素、比例尺不一系数  $d_s$  以及不正交系数  $d\beta$  (共 11 个)间有严格的数学关系式。

当被测物体为二维目标, 即认为  $Z$  为某一常数时, 经过推演并取简易符号后, 式(1)可简化为二维直接线性变换<sup>[3]</sup>关系式:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{l_1^* X + l_2^* Y + l_3^*}{l_7^* X + l_8^* Y + 1} &= 0 \\ y + \frac{l_4^* X + l_5^* Y + l_6^*}{l_7^* X + l_8^* Y + 1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

此式与纠正理论关系式<sup>[4]</sup>外形相同, 但具有不同含义。

从上式推导中可知二维变换各  $l^*$  系数与三维变换各  $l$  系数间的关系<sup>[3]</sup>。定义一矩阵  $L^*$ :

$$L^* = \begin{bmatrix} l_1^* & l_2^* & l_3^* \\ l_4^* & l_5^* & l_6^* \\ l_7^* & l_8^* & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{11}Z + 1} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3Z + l_4 \\ l_5 & l_6 & l_7Z + l_8 \\ l_9 & l_{10} & l_{11}Z + 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

在  $Z=0$  的情况下, 又有:

$$L^* = \begin{bmatrix} l_1^* & l_2^* & l_3^* \\ l_4^* & l_5^* & l_6^* \\ l_7^* & l_8^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ l_5 & l_6 & l_8 \\ l_9 & l_{10} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma_3} L_{\text{内}} R^T L_{\text{外直}} =$$

$$\frac{1}{\gamma_3} \begin{bmatrix} f_x & -f_x \tan \beta & -x_0 \\ 0 & \frac{f_x}{(1+ds) \cos \beta} & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_S \\ 0 & 1 & Y_S \\ 0 & 0 & Z_S \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma_3} \begin{bmatrix} f_x & -f_x \tan \beta & -x_0 \\ 0 & \frac{f_x}{(1+ds) \cos \beta} & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\gamma_3 = -(a_3 X_S + b_3 Y_S + c_3 Z_S)$ 。

二维变换中各  $l^*$  系数的意义以及与三维变换各  $l$  系数间的关系是:

$$\left. \begin{aligned} l_1^* &= \frac{1}{\gamma_3} (a_1 f_x - a_2 f_x \tan \beta - a_3 x_0) = l_1 \\ l_2^* &= \frac{1}{\gamma_3} (b_1 f_x - b_2 f_x \tan \beta - b_3 x_0) = l_2 \\ l_3^* &= \frac{1}{\gamma_3} (\gamma_1 f_x - \gamma_2 f_x \tan \beta - \gamma_3 x_0) = l_4 \\ l_4^* &= \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{a_2 f_x}{(1+ds) \cos \beta} - a_3 y_0 \right) = l_5 \\ l_5^* &= \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{b_2 f_x}{(1+ds) \cos \beta} - b_3 y_0 \right) = l_6 \\ l_6^* &= \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{\gamma_2 f_x}{(1+ds) \cos \beta} - \gamma_3 y_0 \right) = l_8 \\ l_7^* &= \frac{a_3}{\gamma_3} = l_9 \\ l_8^* &= \frac{b_3}{\gamma_3} = l_{10} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

以上的理论推证, 对本文指导意义如下。

1) 二维 DLT 建立了物方二维平面与像片面(数字相机芯片面)间严格的投影关系式, 建立了无需像片内方位元素、无需框标的二平面间的关系式, 使用此式时, 像方坐标系可以使用任意点为坐标原点, 任意方向为坐标轴, 原则上不要求像片面与物方二维平面平行。

2) 像方  $x$  轴与  $y$  轴的不垂直性以及芯片像素是否为正方形对相机的畸变差检校不构成影响。

当控制点个数大于 4 时, 以  $(x, y)$  为观测值,

用以解求 8 个  $l$  系数的误差方程式是:

$$\begin{bmatrix} -v_x \\ -v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{xX}{A} & \frac{yY}{A} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{1}{A} & \frac{yX}{A} & \frac{yY}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^* & l_2^* & l_3^* & l_4^* & l_5^* & l_6^* & l_7^* & l_8^* \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -\frac{x}{A} & -\frac{y}{A} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

假设  $ds=0, d\beta=0, \varphi=\omega=k=0, f_x=f$ , 则各  $l^*$  系数明确的几何意义为:

$$\begin{aligned} L^* &= \begin{bmatrix} l_1^* & l_2^* & l_3^* \\ l_4^* & l_5^* & l_6^* \\ l_7^* & l_8^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ l_5 & l_6 & l_8 \\ l_9 & l_{10} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{Z_S} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_S \\ 0 & 1 & Y_S \\ 0 & 0 & Z_S \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{Z_S} \begin{bmatrix} f & 0 & fX_S \\ 0 & f & fY_S \\ 0 & 0 & Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{Z_S} & 0 & \frac{f}{Z_S} X_S \\ 0 & \frac{f}{Z_S} & \frac{f}{Z_S} Y_S \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & \frac{X_S}{m} \\ 0 & \frac{1}{m} & \frac{Y_S}{m} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

可见, 在前述条件下,  $l_1^*$  与  $l_5^*$  为影像比例尺;  $l_2^*、l_4^*、l_7^*$  与  $l_8^*$  是小值;  $l_3^*$  是  $X_S$  按比例尺的表达值; 而  $l_6^*$  是  $Y_S$  按比例尺的表达值。选择适当的物方空间坐标系  $D-XYZ$ , 使  $(X_S, Y_S)$  为小值时,  $l_3^*$  与  $l_6^*$  也为小值。

## 2 数字相机光学畸变模型的建立方法

自制的平面控制网  $E$  与数字相机芯片面  $P$  之间, 借助控制点  $(A, B, C, D)$  可实现二维直接线性变换, 如图 1 所示。解得各  $l$  系数后, 可计算其他控制点在芯片上的理想坐标  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ , 其他控制点的像点量测坐标  $(x_i, y_i)$  与其理想坐标  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  的差值  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$  则是相机构像中引起的各类系统误差的总和。试验证明, 此系统误差的分布规律, 包括其数值大小与方向, 较符合径向光学畸变的分布规律。

CCD 芯片的平面度可保持  $\pm 1\mu\text{m}$  的级别, 而物方平面控制网在 AV10 TAB 型绘图桌上制作。借助计算机绘图功能, 在绘图桌上的 0.1mm 厚的

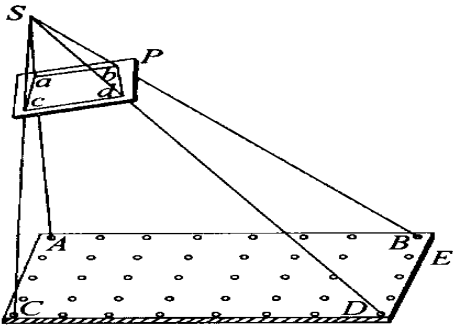


图1 二维变换

Fig. 1 2D DLT

聚酯薄膜上,绘制了  $1.1\text{m} \times 0.9\text{m}$  的控制格网,格网间距  $5\text{cm}$ ,格网交会处绘制直径为  $15\text{mm}$  的黑色实心圆形标志,共 399 个,使之有足够的密度,如图 2 所示。据经验,各标志中心误差不大于  $\pm 0.05\text{mm}$ 。按类似方法,在厚  $8\text{mm}$  的裱板玻璃上也制作了类似的平面控制。

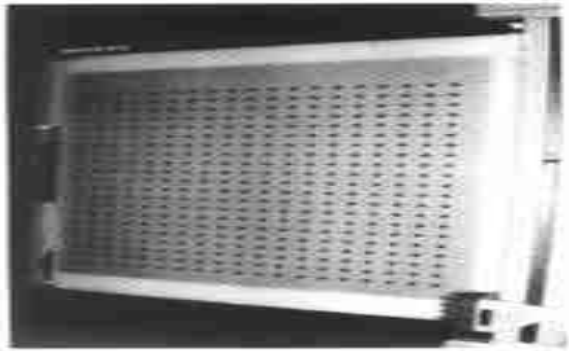


图2 平面控制网

Fig. 2 A 2D Control

使用 Nikon E2 型数码相机 ( $1\,280$  像素  $\times$   $1\,000$  像素,像素大小约  $10\mu\text{m}$ ) 和 Kodak DCS 4800 型数码相机 ( $2\,160$  像素  $\times$   $1\,440$  像素) 作为试验相机,对此类控制网进行了近似“竖直摄影”。选择紧靠像幅边缘的 4 个点为控制点,建立倾斜影像与平面控制网间的投影关系,并解求  $l$  系数。

设标志的量测坐标为  $(x_i, y_i)$ , 借  $l$  系数反算后的标志理想坐标为  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ , 则它们的差值主要是各类光学畸变差  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$  引起的:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - \bar{x}_i \\ \Delta y_i &= y_i - \bar{y}_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  为理论值;  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$  为畸变差(不是畸变差改正数)。

现以 Kodak DCS 4800 型的试验为例。本检校方法并没有与引起误差的物理因素相联系,这些因素包括物镜光学中一般意义上的径向畸变(radial distortion)和偏心畸变(decentering distortion),

也包括随变化调焦距而变化的径向畸变系数,不位于调焦距上物点的径向畸变的变化以及其他各种电学和光学因素引起的几何成像误差等等。按 4 个角隅点(001, 015, 136, 150)纠正后,各控制点的像点畸变差  $\Delta r$  如图 3 所示。其大小、指向均与径向畸变的一般推断相一致,其误差矢量方向指向像幅中央(应指向自准直主点 PPA),而且,在没有设定 4 个角隅点的畸变为零的情况下,全幅影像的畸变自外缘向中央渐小。

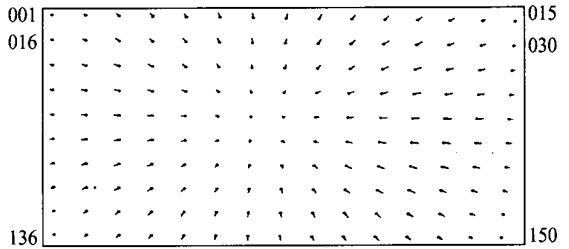


图3 芯片上的畸变差分布图

Fig. 3 A Distortions Distributed Chart on the CCD Chip

根据 150 个点的物方坐标、对应理想像点的坐标像素数以及相应的畸变差值可构成畸变差  $\Delta r$  的初级模型,如图 4 所示。该模型根据数字相机芯片上 150 个离散点的畸变差  $\Delta r$  构成,各方向  $(x, y, \Delta r)$  均以像素为单位。相应的  $x$  向的畸变差初级模型如图 5 所示,  $y$  向的如图 6 所示。

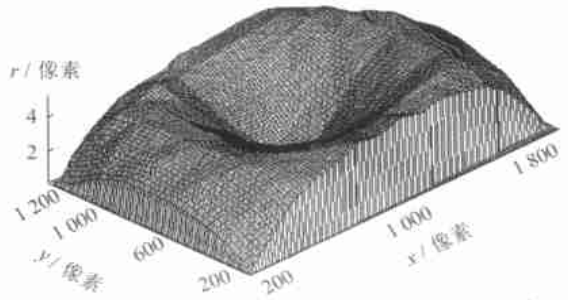


图4 畸变差初级模型

Fig. 4 A Distortion Primary Model

设畸变差  $\Delta r$  与向径  $r$  间遵循如图 7 所示的关系,而令像幅边缘点  $a$  的畸变差为零后,  $\Delta r$  与  $r$  间则应遵循如图 8 所示的关系。图 8 所示结果与畸变差初级模型的图 4 相符合。

同样地,设畸变差在  $x$  方向的分量  $\Delta x$  与坐标  $x$  间遵循如图 9 所示的关系。令像幅边缘  $(a, b)$  的  $\Delta x$  为零后,  $\Delta x$  与  $x$  间则应遵循如图 10 的关系。图 10 所示结果与  $x$  向畸变差初级模型图 5 相符合。

常规的相机综合检校方法,为测定少量的畸变系数(如  $k_1, k_2, p_1, p_2$ )的观测值个数也极为有限,而且这些畸变系数的测定质量又受各类未知数间

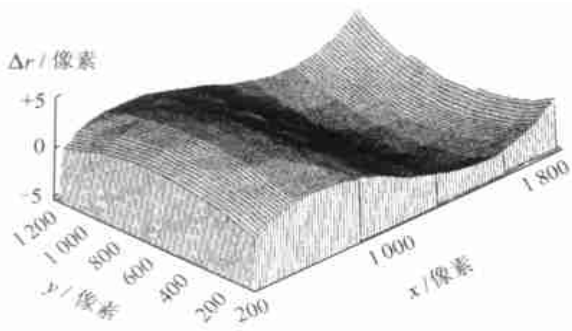


图 5 x 方向畸变差初级模型

Fig. 5 A Distortion Primary Model for x

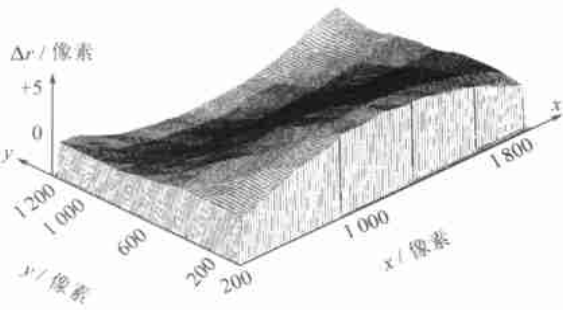


图 6 y 方向畸变差初级模型

Fig. 6 A Distortion Primary Model for y



图 7 畸变差 Δr

Fig. 7 A Chart for Distortion Δr

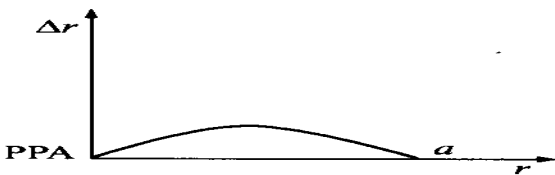


图 8 Δra=0 时的畸变图形

Fig. 8 A Distortion Chart When Δra=0

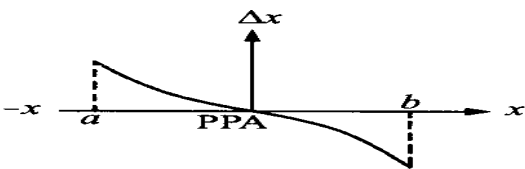


图 9 畸变差 Δx

Fig. 9 A Distortion Chart for x

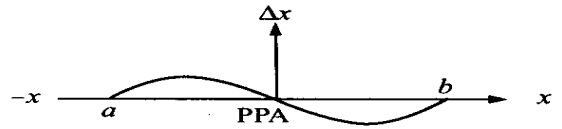


图 10 Δxa=Δxb=0 时的畸变差

Fig. 10 A Chart When Δxa=Δxb=0

像系统误差, 均要施测数百个观测值, 测定结果直接反映大量点位的畸变实际情况。为实际应用方便, 应依据这些离散点上的已知畸变差的数值, 或内插推算像幅上所有像素位置的畸变, 以建立畸变高级模型, 或在应用中临时内插某像点的畸变。此两种方案的内插方法原则上是一致的。对应于每个调焦面上的畸变高级模型, 所需的存储量至少等于芯片的分辨率, 即需要数个 G 至数十个 G。临时内插某像点畸变的方案, 则更为有利。

对于某一个调焦面畸变差的内插, 理论上应按畸变差主项以下的表达式执行:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= k_0x + k_1xr^2 + k_2xr^4 + \dots \\ \Delta y &= k_0y + k_1yr^2 + k_2yr^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

而且, 参考数字高程模型 DEM 生成过程, 可选择的内插方案还有移动曲面拟合法、双线性内插法、线性内插法以及邻近点的平均值法。但是, 就本试验而言, 不同内插方案的计算结果相差甚微。

### 3 结 语

本文提出的基于二维直接线性变换的畸变差检校方法, 如同 Brown 的铅垂线法一样, 也是一种仅用于检校畸变差的方法。本方法没有测定畸变差系数, 而是采用“算总账”的方法, 直接测定各像素上的误差(改正值)。各像素上的误差包含有各类光学畸变误差及其他误差。这种方法较之测定光学畸变系数(如  $k_1, k_2, \dots, p_1, p_2, \dots$ )更加切合实际。铅垂线法更适用于以胶片为感光介质的摄影机, 本方法更适用于无底片压平问题的数字相机。

本方法也适用于像素不是正方形的各种 CCD 相机, 工艺关键是建立准确的平面控制网以及对圆形标志中心的准确的自动提取。本方法操作快速方便, 可以对数码相机不同调焦距进行多组测定, 以考虑调焦变化对畸变的影响, 特别适用于近景摄像机的检定, 每组模型的建立耗时约 5min。建立平面控制网的投入较之建立铅垂线控制网的投入和所占空间均较小, 而且易于维护。

相关性的影响。本方法仅为测定以畸变为主的成

## 参 考 文 献

- 1 冯文灏. 一种测定普通相机畸变差的方法. 测量员, 1988(4): 20~23
- 2 冯文灏. 关于近景摄影机检校的几个问题. 测绘通报, 2000(10): 1~3
- 3 冯文灏. 近景摄影测量. 武汉: 武汉大学出版社, 2002
- 4 李德仁, 周月琴, 金为铄. 摄影测量与遥感概论. 北京: 测绘出版社, 2001
- 5 冯文灏. 立体视觉系统检校中引入约束条件的推演. 武汉测绘科技大学学报, 1994, 19(2): 95~100
- 6 冯文灏. 近景摄影测量限差的特殊性. 武汉测绘科技大学学报, 2000, 25(6): 542~547
- 7 Atkinson K B. Close Range Photogrammetry and Machine Vision. Department of Photogrammetry and Surveying, University of London, 1996
- 8 Atkinson K B. Developments in Close-Range Photogrammetry—1 Applied. London: Science Publishers 1980
- 9 Beyer H A. Linejitter and Geometric Calibration of CCD-Cameras. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 1990
- 10 Beyer H A. Geometric and Radiometric Analysis of a CCD-Camera Based Photogrammetric Close-Range System. Mitteilungen Nr. 51, Institute for Geodesy and Photogrammetry, 1992
- 11 Brown D C. Close-Range Camera Calibration. Photogrammetric Engineering, 1971, 37(8): 855~866
- 12 Ethorg U. Non-metric Camera Calibration and Photo Orientation Using Parallel and Perpendicular Lines of the Photographed Object. Photogrammetria 1984, 39(1): 13~22
- 13 Fraser C S. The Metric Impact of Reduction Optics in Digital Cameras. Photogrammetric Record, 1996 15(87): 437~446
- 14 Fraser C S. A Correction Model for Variation of Distortion Within the Photographic Field. Close-Range Photogrammetry Meets Machine Vision, Zurich, Switzerland, 1990
- 15 Fraser C S. Brown D C. Industrial Photogrammetry—New Developments and Recent Application. GSI Technical Report 85-004, Geodetic Services Inc. 1511 Riverview Drive Melbourne, Florida, 32901
- 16 Feng W H. Deduction of Constraint Condition in the Calibration of Stereo-Vision System. Geo-spatial Information Science, 1998, 1(1): 33~37
- 17 Feng W H. The Specific Character of Limit Errors in Close Range Photogrammetry. Geo-spatial Information Science, 2001, 4(3): 50~56

第一作者简介: 冯文灏, 教授, 博士生导师. 现从事近景摄影测量和工业测量的教学与研究工作。

## Creation of Distortion Model for Digital Camera Based on 2D DLT

FENG Wenhao<sup>1</sup> LI Jiansong<sup>1</sup> YAN Li<sup>2</sup>

(1 School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** This paper presents that distortion model could be created for different kinds of digital cameras based on the theory of 2D direct linear transformation by using a accurate 2D control field. The method given in this paper is applied to correct all systematic errors in every pixel or in every interested image point. It is possible to create a digital distortion model to a digital camera with designed lens and given focused object. During 2D transformation four points which are located at the image corners are generally chosen, so the distortions of these points are assumed as zero. The two dimensional control field can be created by using precise drawing table, or can be arranged on the wall with a lot of circular targets measured by on line total stations.

**Key words:** CCD; 2D DLT; distortion error; digital distortion model

**About the first author:** FENG Wenhao, professor, Ph. D supervisor. His research fields include technique of close range photogrammetry and special industrial surveying. His typical achievements include an investigation into the theory and applications of structured light industrial surveying system based on laser-theodolite with three freedom of rotation, etc. He has published over 100 papers.

(责任编辑: 涓涓)