

基于通量均衡基准的地壳垂直形变场分析模型

张 勤¹ 范一中² 赵超英¹

(1 长安大学测绘科学系, 西安市雁塔路 126 号, 710064)

(2 南京大学天文系 南京市汉口路 22 号, 210093)

摘 要: 根据全球通量均衡假说建立了地壳垂直形变场的分析模型, 在球面近似下求得了该模型的球谐函数级数解并拟合了两个不同区域的地壳垂直形变场, 编绘了等值线图, 继而在密切平面坐标系下导出了该模型的 Fourier 级数解。结果表明, 该方法不仅具有几何意义, 而且具有一定的地球动力学意义。

关键词: 地壳垂直运动; 通量均衡; 动力学模型

中图法分类号: P542

1 通量均衡基准

由地球动力学知, 地壳的运动是一种均衡过程, 板块的增生与削减维持一种均衡关系, 地壳在运动过程中, 其体积不变^[1]。地壳运动的这种均衡性奠定了动态大地测量中采用均衡基准作为描述地壳形变的恰当形变基准(SDD)的基础。

均衡基准常分为离散点场的均衡基准和连续点场的均衡基准, 前者的均衡条件为:

$$\sum_{i=1}^n h_j = 0, 1 \leq n \leq P \quad (1)$$

式中, P 为水准点个数; h_j 为水准点上的地壳垂直运动速率, 这类基准受到水准点分布不均匀的影响, 往往不能定量地描述点场的运动情况。连续点场的均衡基准满足通量均衡条件:

$$\iint_D H(x, y) dx dy = 0 \quad (2)$$

式中, D 为形变区域; $H(x, y)$ 为地壳垂直运动速率函数。由条件式(2)构成的均衡基准, 避免了水准点分布不均匀的影响, 是描述地壳垂直运动速率较为理想的形变基准。本文的主要目的就是从小式(2)直接导出一个比较完备的数学模型, 进而为研究地壳垂直运动提供一条新途径。目前, 该领域主要采用多面函数拟合法。

2 均衡理论下的分析模型

式(2)的物理意义是指在单位时间内区域面上的垂直形变量之和等于 0。据此并附加一系列假设, 文献[2, 3]建立了描述地壳垂直运动速率的调和函数模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 0 \\ H(x, y)|_D = H_s(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

式中, D 为形变区域; S 为区域边界。分别应用加权残值法^[2]、有限元法^[3]进行了求解。但该模型的数学推导不是太严格, 故其合理性尚存争议^[4-5], 笔者已经推得了更严密的数学模型^[6-7]。

根据地球动力学理论, 式(2)较适合应用于描述大区域的垂直形变场。故可合理地假定整个地壳为研究对象时式(2)仍成立, 则形式变为:

$$\oint_S H ds = 0 \quad (4)$$

又据调和函数的性质^[8], 区域 V 内的调和函数 F 的法向导数沿区域界面 S 的面积分为 0, 即

$$\oint_S \frac{\partial F}{\partial n} dS = 0 \quad (5)$$

注意到 F 是任意调和函数, 并联合式(4)、式(5)可取:

$$H = \frac{\partial F}{\partial n} \tag{6}$$

F 的具体形式由边界面上实测的 $H|_D$ 约束得到, 即

$$\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_D = H \Big|_D \tag{7}$$

于是, 建立了基于通量均衡基准的地壳垂直形变的分析模型:

$$\begin{cases} \Delta F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_D = H \Big|_D \end{cases} \tag{8}$$

由上式解出 F 后可按

$$H = \frac{\partial F}{\partial n} \tag{9}$$

得到整个形变区域的地壳垂直形变速率函数 H 。为使结果具有普遍性, 采用任意坐标系。为方便应用, 借鉴地球物理的做法采用球面近似, 式(8)变为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{(\rho_0, \theta_i, \varphi_i)} = H \Big|_{(\rho_0, \theta_i, \varphi_i)} \end{cases} \tag{10}$$

该式的外部空间解为:

$$F(r, \theta, \varphi) = -R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{Y_n(\theta, \varphi)}{n+1} \tag{11}$$

式中, $Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)$, $P_n^k(\cos \theta)$ 为缔合勒让德多项式。

考虑到式(9), 有:

$$H(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} Y_n(\theta, \varphi) \tag{12}$$

故可在地壳垂直形变监测点上组成如下的观测方程(顾及区域性区域影响):

$$H_{i \text{ 实测}} + V_i = \sum_{n=0}^{\infty} (R/r_i)^{n+2} Y_n(\theta_i, \varphi_i) + \alpha_0 \theta_i + b_0 \varphi_i + c_0 (R/r_i) \tag{13}$$

当采样点足够多且分布均匀(考虑到 $Y_n(\theta, \varphi)$ 的特殊性, 任意两点间不能靠得太近, 否则观测矩阵趋于病态)时, 可以在 $V^T P V = \min$ 条件下确定式(13)中的一组待定系数 A_{nk}, B_{nk} , 其逼近程度可由拟合残差 V_i 衡量(拟合残差的大小并不充分体现本模型的优劣, 因为非构造因素以及局域的构造运动都会影响拟合残差值。但应用于局部区域作为一种拟合手段, 拟合符合程度的检核又是必要的, 所以笔者仍采用拟合残差。 R 为地球短轴半径, 取 6 365km, r 取为观测点到地心的距离)。

采用 Matlab 编程分别对渤海湾地区和西北某地区的垂直形变场进行了模拟, 表 1 和图 1 为渤海湾地区垂直运动的拟合数据和速率等值线图。

表 1 数据拟合符合情况表

Tab. 1 Data Approxiation

点名	实测速率	拟合速率	点名	实测速率	拟合速率	点名	实测速率	拟合速率
晋县	-0.52	-0.67	沧州	-1.31	-1.57	北京	2.21	3.51
定县	2.20	2.01	唐家屯	-4.72	-4.16	安平	2.31	1.77
安国	0.30	-0.50	盐山	1.0	0.90	霸县	-2.66	-1.89
保定	1.67	0.57	黄骅	-1.79	-2.49	杨村	-1.00	-2.90
大成庄	-2.66	-1.97	小站	-5.43	-4.16	芦台	-2.33	-2.13
泊头	-1.06	-1.43	紫荆关	2.74	4.19	天津	-4.29	-3.17
石家庄	2.0	2.23	罗庄	2.68	3.30	宝坻	1.89	1.73
河间	-3.33	-3.00	涿县	2.42	1.47	玉田	2.34	1.32
任丘	-3.08	-2.56	良乡	2.25	2.18	插点 1	3.49	2.64
高丽铺	3.08	4.19	唐山	2.04	1.31	△		1.80

图 2 和图 3 分别为西北某地区地壳垂直形变场数据点分布图和速率等值线图。在试验过程中可以发现:

1) 本文模型是基于地球动力学理论的, 非构造因素(如大量抽取地下水)难以在模型中得到反映。

2) 由于 $Y_n(\theta, \varphi)$ 的特殊性, 用该模型对局域的地壳形变加以拟合时, 区域应较大, 一般 L, B (即 θ, φ) 的跨度应在 3° 以上为宜, 否则观测矩阵

趋于病态。

该模型可以作为一种数值拟合手段, 但更重要的应用前途是, 用该模型拟合出全球范围或部分大陆的地壳垂直运动速率面(当然体现的是一种长趋势的大区域的构造运动影响), 得到 A_{nk}, B_{nk} 等系数应用于特定区域, 从而把大区域的构造作用同其他人为因素及局域构造作用的影响分离开来, 后者尽管在局域范围可能是系统的, 但在大范围应体现为一种随机性, 可以用其他方法加以研究。

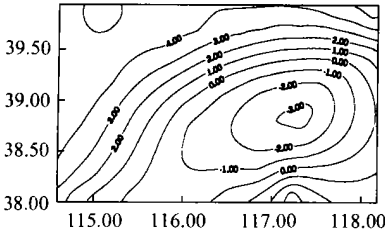


图 1 渤海湾地区垂直运动速率等值线图(拟合)

Fig. 1 Contour Line of Vertical Velocity in the Bohai Gulf (Fitting)

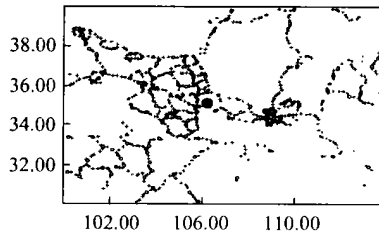


图 2 西北某地区地壳垂直形变场模拟所采用的数据点分布图

Fig. 2 Tridimensional Graph of Vertical Movement of the Crust in the Bohai Gulf Area

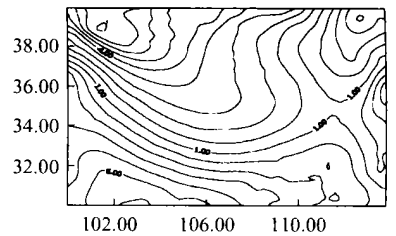


图 3 西北某地区地壳垂直形变场速率等值线图

Fig. 3 Local Topocentric Cartesian Coordinate

3 富氏分析法应用于地壳垂直形变场模拟的科学性

如图 4 所示, 取定局部密切坐标系 $O-XYZ$,

$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \Psi$, 局部应用时 Ψ 很小, $\cos \Psi \approx 1$, 故可作近似 $\frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{\sigma} \approx \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\sigma} \approx H \Big|_{\sigma}$.

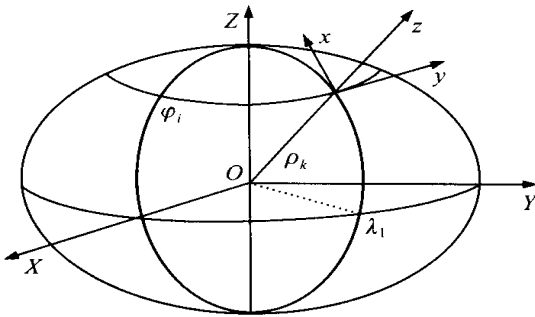


图 4 局部密切坐标系

Fig. 4 Local Coordinate System

Laplace 方程为直角坐标系下的旋转不变量, 最后切平面坐标系下的式(8)近似为:

$$\begin{cases} \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Z} \Big|_{\sigma} = H \Big|_{\sigma} \end{cases} \quad (14)$$

尽管上述近似会引起误差, 但经 Brain(1991) 的研究表明, 这些误差是可以接受的, 这方面的讨论详见文献 9。对式(14)分离变量:

$$F(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (15)$$

由式(14)、式(15)可得:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (16)$$

由于 x, y, z 为独立变量, 欲使式(16)成立,

$\frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_x, \frac{d^2 Y}{dy^2} \Big|_y, \frac{d^2 Z}{dz^2} \Big|_z$ 必为常数。令

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -n^2 \omega_1^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \omega_2^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2 \end{cases} \quad (17)$$

由常微分方程理论:

$$\begin{cases} X = \cos(n\omega_1 x) \text{ 或 } \sin(n\omega_1 x) \\ Y = \cos(m\omega_2 y) \text{ 或 } \sin(m\omega_2 y) \\ Z = \exp\left(\pm z \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2}\right) \end{cases} \quad (18)$$

由式(15)、式(17)、式(18)有:

$$F_{nm(x, y, z)} = \exp(\pm z \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2}) \cdot (\cos(n\omega_1 x), \sin(n\omega_1 x)) \begin{bmatrix} A_{nm} & B_{nm} \\ C_{nm} & D_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\omega_2 y) \\ \sin(m\omega_2 y) \end{bmatrix} \quad (19)$$

考虑到求解是在球外空间进行的, 可知 $Z = \exp\left(\sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} z\right)$ 或 $m = n = 0$ 不是本问题的解, 故弃之不计。由于式(11)是线性齐次偏微分方程, 故 $F(x, y, z)$ 的通解为式(19)的线性组合($m + n > 0$):

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-z \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2}) \cdot (\cos(n\omega_1 x), \sin(n\omega_1 x)) \begin{bmatrix} A_{nm} & B_{nm} \\ C_{nm} & D_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\omega_2 y) \\ \sin(m\omega_2 y) \end{bmatrix} \quad (20)$$

这就是模型(8)在切平面坐标系下的 Laplace 级数解。

一般求解时边界数据在有限区间上给定, 设为 $\sigma: [-L_1 \leq x \leq L_1; -L_2 \leq y \leq L_2]$, 则 $\omega_1 = \pi/L_1, \omega_2 = \pi/L_2$ 。如果视 z 为常数, 则在某观测点

上有 $(m+n > 0)$:

$$H + \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} \cdot (\cos(n\omega_1 x), \sin(n\omega_1 x)) \begin{pmatrix} A_{nm} & B_{nm} \\ C_{nm} & D_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(m\omega_2 y) \\ \sin(m\omega_2 y) \end{pmatrix} \quad (21)$$

这其实就是黄立人先生提出的提取地壳垂直形变信息的富氏分析法^[10]。本文的研究表明,富氏谱分析也是基于全球通量均衡基准的地壳垂直形变的分析模型,因此该方法不仅具有一定的几何意义,而且具有一定的地球动力学意义。这一方面证实了富氏谱分析法应用于模拟地壳垂直形变场研究的科学性,另一方面也为本文的模型提供了一个有力的例证。

参 考 文 献

- 1 Hardy R L. The Application of Multiquadric Equations and Point Mass Anomaly Models to Crustal Movements Studies. NOAA, Technical Report NOS76, NGS11, 1978
- 2 李家权, 杜东菊, 范 文. 多项式拟合在地壳垂直运动研究中的应用. 西安地质学院学报, 1995, 17(增刊)
- 3 李家权, 张 勤. 编制地壳垂直运动速率面等值线图

的有限元法. 地壳形变与地震, 1998, 18(3)

- 4 范一中. 调和分析法运用于地壳垂直形变研究的几点讨论. 测绘工程, 2000, 9(1)
- 5 范一中. 调和分析法应用于编制地壳垂直速率面等值线图的可靠性讨论. 地壳形变与地震, 2000, 20(1)
- 6 范一中, 张 勤. 基于通量均衡基准的地壳垂直运动模型. 地壳形变与地震, 2001, 21(1)
- 7 张 勤, 范一中. 地壳垂直运动的均衡理论及其分析模型. 测绘学报, 2001, 30(3)
- 8 胡明城, 鲁 福. 现代大地测量(上). 北京: 测绘出版社, 1993. 444~446
- 9 边少锋. 大地测量边值问题数值解法与地球重力场逼近: [博士论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1992
- 10 张 勤. 地壳垂直形变场拟合技术在中国的发展. 测绘科学, 2002
- 11 赵承坤, 黄立人. 速率面多面法时核函数中心点的回归选择. 地壳形变与地震, 1991, 11(2)
- 12 赵超英. 基于均衡基准理论的地球垂直形变场研究: [硕士论文]. 长安: 长安大学, 2002

第一作者简介: 张勤, 教授, 博士生导师. 主要从事大地测量和 GPS 数据处理等方向的研究, 已发表论文近 30 篇, 出版《全球定位系统(GPS)测量原理及其数据处理基础》等专著。

Analysis Model of Crustal Vertical Movement Based on the Flux Isostasy

ZHANG Qin¹ FAN Yizhong² ZHAO Chaoying

(1 Dept. of Surveying Engineering, Chang'an University, 126 Yanta Road, Xi'an 710054, China)

(2 Dept. of Astronomy, Nanjing University, 22 Hankou Road, Nanjing 210093, China)

Abstract: In this paper, the analysis model of crustal vertical movement is established based on the hypothesis of the global flux isostatic datum, and its harmonic function series solution is proposed. The solution to the deformation field of the crustal vertical movement in the Bohai Gulf area has been fitted and its isoline map has been compiled. Comparing this model with harmonic analysis model, this paper indicates that this model is better and more rigorous in theory. Furthermore the Fourier series solution is derived on the osculating plane coordinate system which was proposed by Huang Liren (1990). The result shows that the method is of physical foundation as well as on geometry, vice versa our dynamical model of crustal vertical movement is favored by the self-consist of our model and Huang Liren's method.

Key words: crustal vertical movement; flux isostatic; dynamical model

About the first author: ZHANG Qin, professor, Ph. D supervisor, majors in space geodesy and data process.

(责任编辑: 晓晨)