DOI:10.13203/j.whugis2004.11.015
第 29 卷 第 11 期　　武汉大学学报·信息科学版　　Vol.29 No.11
2004 年 11 月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Nov. 2004

文章编号:1671-8860(2004)11-1004-04　　文献标识码:A

评价 GPS 相位模糊度整数解正确性的严密方法

周扬眉[1]　刘经南[2]　李　信[3]

(1　武汉大学 GPS 工程技术研究中心, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)
(2　武汉大学校长办公室, 武汉市珞珈山, 430072)
(3　中国广东核电工程有限公司, 阳江市漠江路 128 号, 529500)

摘　要: 针对如何评价模糊度整数解的正确性, 指出了基于传统的假设检验理论的三步法存在的理论缺陷, 介绍了模糊度归整域的概念和可容许整数估计的定义, 并在 Teunissen 关于可容许整数估计原定义的基础上给出了更为严密的新定义。基于这个新定义, 讨论了模糊度成功率的概念及其计算公式。
关键词: GPS 精密定位; 模糊度整数解; 归整域; 可容许整数估计; 模糊度的成功率
中图法分类号: P228.42

对于 GPS 精密定位, 不管是精密静态定位, 还是精密动态定位, 关键是要正确地确定相位整周模糊度。通常 GPS 相位整周模糊度解有浮点解和整数解, 其中模糊度浮点解的求取较为简单; 而模糊度整数解的求取要复杂得多, 它是以其浮点解为基础求得的。由于模糊度整数解比其浮点解更为准确, 因此, 在实际工作中应尽可能地求解和使用模糊度整数解。但必须注意的是, 模糊度整数解的求取与所求得的模糊度整数解是否正确不是一回事。因为一个不正确的模糊度解往往能导致一个不能接受的错误的定位结果, 因此, 在求出模糊度整数解后, 还应对其正确性进行合理的评价。只有在对模糊度整数解的正确性有充分的把握时, 才能认为其定位结果是安全的。

1　传统的假设检验理论存在的缺陷

关于模糊度整数解正确性的评价方法的研究一直都是国际上 GPS 学术界研究的热点和难点。不少学者在这方面做了许多工作, 大多是采用统计学上传统的假设检验理论来进行判断和识别, 其检验过程归纳起来有三步[1]: ① 基线位置参数和模糊度浮点解的正确性检验[1,2]; ② 模糊度浮点解和其固定解的差异是否不显著的检验[1,3]; ③ 模糊度的最优固定解与次优固定解的比较检验[1,3]。

严格地讲, 第一步关于模糊度和位置参数浮点解的检验是没有问题的, 但第二步和第三步的检验存在着一定的理论缺陷: 一方面忽略了模糊度固定解的统计性质; 另一方面没有考虑模糊度最优固定解的方差与次优固定解的方差之间的相关性; 另外, 模糊度次优解的求取在数学上也没有成熟和专门的算法。因此, 基于上面三步的假设检验理论是近似和粗略的。为了准确地评价所求出的基线位置参数和模糊度解的正确性(这里主要是评价模糊度解的正确性, 因为一旦模糊度解正确, 相应的基线位置参数解也不会有太大的问题), 需要有一个严密而系统的理论。

2　可容许整数估计及其归整域

尽管目前存在着许多种关于用模糊度浮点解来计算模糊度整数解的方法, 但不管什么样的求解, 模糊度整数解的方法都可归纳为一个从 m 维实数空间到 m 维整数空间的映射 $F: R^m \to I^m$。一旦这个投影 F 被定义, 由模糊度浮点解 $\hat{a}$ 来计算模糊度整数解 a 的过程就可以简单地表示为 $a = F(\hat{a})$。由于整数空间 I^m 相对于实数空间 R^m 来说是离散的, 因此, 这里所定义的映射 F 不是一个一一对应的映射, 而是多对一的映射。这意味着不同的实数值模糊度解向量可投影到同一

收稿日期: 2004-06-10。
项目来源: 国家自然科学基金资助项目(40174005)。

个模糊度整数解向量上。所以对于每个整数向量 $z \in I^m$，都可以找到一个子空间 $S_z \subset R^m$ 为：

$$S_z = \{x \in R^m \mid z = F(x)\},\quad \forall z \in I^m \tag{1}$$

式中，子空间 S_z 包含了所有通过 F 投影到相同整数向量 $z \in I^m$ 上的实数值的模糊度解，通常把这个子空间称为归整域[4]。在这个归整域中，所有模糊度的浮点解都被固定到相同的模糊度固定解 z 上。

基于模糊度的归整域，可以给出相应的模糊度整数估值的简单表述公式为[4]：

$$a = \sum_{z \in I^m} z\, \delta_z(\hat{a}) \tag{2}$$

式中，$\delta_z(\hat{a}) = \begin{cases} 1, & \hat{a} \in S_z \\ 0, & \hat{a} \notin S_z \end{cases}$。

由于归整域完全决定了模糊度的整数估值，因此，可以通过赋予模糊度的归整域具有某些性质（或满足某些条件），来定义所需要的模糊度整数估值类。Teunissen 便给出了如下的关于模糊度可容许整数估计的定义[4]。

定义 1　如果整数估值 $a = \sum_{z \in I^m} z\, \delta_z(\hat{a})$ 是可容许的，但它必须满足下面 3 个条件：① $\bigcup_{z \in I^m} S_z = R^m$；② $\mathrm{int} S_{z_1} \cap \mathrm{int} S_{z_2} = \emptyset$，$\forall z_1, z_2 \in I^m$，$z_1 \neq z_2$；③ $S_z = z + S_0$，$\forall z \in I^m$。式中，int 是 interior 的简写。

第一个条件表示不允许被投影的向量元素在实数空间 R^m 内存在空洞，这可保证每个模糊度的浮点解都能投影到整数空间 I^m 上；第二个条件表示相邻归整域间不允许出现重叠，这可保证每个模糊度的浮点解都只能投影到一个整数向量上；第三个条件表示当模糊度的浮点解被一个整数向量所移动时，相应的模糊度整数解也被相同的整数向量所移动，这个性质可以使用整数去存技术：$F(\hat{a} - z) + z = F(\hat{a})$。

必须指出的是，第二个条件允许相邻归整域间存在着公共的边界，并假定模糊度浮点解位于这个公共边界上的概率为零。从理论上讲，这样的允许和假定是不严密的。因为实际情况千变万化，模糊度的浮点解完全有可能位于这个公共的边界上，只是这样的概率非常小，但决不能证明恒为零。一旦模糊度浮点解刚好位于这个公共的边界上，则意味着这个模糊度浮点解同时属于两个归整域，这样它就会被同时投影到两个不同的整数向量上。显然，这破坏了映射 F 的多对一的投影性质。为此，本文基于四舍五入的凑整原则，给出了更为严密的定义。

定义 2　如果整数估值 $a = \sum_{z \in I^m} z\, \delta_z(\hat{a})$ 是可容许的，则它必须满足下面 3 个条件：① $\bigcup_{z \in I^m} S_z = R^m$；② $S_{z_1} \cap S_{z_2} = \emptyset$，$\forall z_1, z_2 \in I^m$，$z_1 \neq z_2$；③ $S_z = z + S_0$，$\forall z \in I^m$。

第一和第三个条件与定义 1 中的相应条件完全相同，但第二个条件却有一个微小的变化，它规定了相邻归整域间不允许有任何公共的向量元素。当然，相邻归整域间也不允许有任何的公共边界，这意味着任何模糊度浮点解都只能属于一个归整域，这样它就只会被投影到一个整数向量上。显然，这保护了映射 F 的多对一的投影性质。因此，定义 2 比定义 1 更为严密。本文下面的讨论都是基于定义 2 来进行的。另外，从几何上严格地讲，定义 1 所确定的归整域是一个封闭的子空间，而定义 2 所确定的归整域是一个上开下闭的有界子空间。

3　模糊度的成功率

3.1　模糊度为任意整数向量时的概率

模糊度的任何整数估值都有自己的概率分布。由于模糊度的整数估值在实数空间上是离散的，因此，其概率分布只能通过概率函数来描述。当模糊度估值 $z \in I^m$ 时，它的概率函数表示为 $P(a = z)$。为了确定这个概率函数，首先必须要有模糊度浮点解 $\hat{a}$ 的概率密度函数，这里假定为 $p_{\hat{a}}(x)$。由于 $a = z \Leftrightarrow \hat{a} \in S_z$，显然有 $P(a = z) = P(\hat{a} \in S_z)$。因此，模糊度整数估值（解）$a$ 的概率函数为：

$$P(a = z) = \int_{S_z} P_{\hat{a}}(x)\,\mathrm{d}x,\quad \forall z \in I^m \tag{3}$$

由于模糊度整数估值的归整域 S_z 是一个上开下闭的有界子空间，要计算出式(3)的概率值必须用到积分极限技术。例如，在一维的情况下，当 $S_z = [z - 0.5, z + 0.5)$ 时，可得：

$$P(a = z) = \int_{S_z} p_{\hat{a}}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{z-0.5}^{z+0.5} p_{\hat{a}}(x)\,\mathrm{d}x$$

当模糊度浮点解的概率密度函数 $p_{\hat{a}}(x)$ 在点 $z + 0.5$ 的邻域内连续时，这个积分极限是存在的。由于 $p_{\hat{a}}(x)$ 一般为正态分布的函数，因此，这个积分极限总是存在的。对于多维情况而言，也能得到和一维情况相同的结论。

3.2　模糊度的成功率

由于传统的假设检验理论在评价模糊度整数解正确性时存在着诸多理论缺陷，因此，需要寻求一个理论上更加严密的评价尺度。于是便产生了模糊度成功率的概念。其严密的定义如下[4]。

定义3 模糊度的整数估值 $\check{a}$ 等于模糊度的真值 a 时的概率 $P(\check{a}=a)$ 就是模糊度的成功率。其计算公式为：

$$P(\check{a}=a)=\int_{S_a} p_{\hat{a}}(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

根据这个定义可知，模糊度的成功率其实就是求得正确模糊度解的概率。对于评价模糊度解的可靠性来说，模糊度解的成功率是一个非常重要的诊断手段，通过它能够知道求出的模糊度整数估值在多大程度上和正确的模糊度解一致。当模糊度的成功率足够大时(如非常接近于1时)，才能说这个模糊度解是可靠的和安全的。一个过低的模糊度成功率往往能导致一个不正确的模糊度整数估值，从而产生不能接受的定位结果。

模糊度的浮点解 $\hat{a}$ 一般服从如下的正态分布：

$$\hat{a} \sim N(a, \boldsymbol{D}_{\hat{a}}) \tag{5}$$

式中，向量 a 是未知的模糊度真值向量；$\boldsymbol{D}_{\hat{a}}$ 表示模糊度浮点解 $\hat{a}$ 的方差阵。根据式(4)，相应的模糊度成功率为：

$$P(\check{a}=a)=\int_{S_a}(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\det(\boldsymbol{D}_{\hat{a}}^{-1})}\cdot \exp\{-\frac{1}{2}\|x-a\|^2_{\boldsymbol{D}_{\hat{a}}}\}\mathrm{d}x \tag{6}$$

令 $t=x-a$，且 $t\in R^m$，$a\in I^m$，则式(6)可变换为：

$$P(\check{a}=a)=\int_{S_0}(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\det(\boldsymbol{D}_{\hat{a}}^{-1})}\cdot \exp\{-\frac{1}{2}\|t\|^2_{\boldsymbol{D}_{\hat{a}}}\}\mathrm{d}t$$

然后，再用 x 代替向量 t，可得：

$$P(\check{a}=a)=\int_{S_0}(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\det(\boldsymbol{D}_{\hat{a}}^{-1})}\cdot \exp\{-\frac{1}{2}\|x\|^2_{\boldsymbol{D}_{\hat{a}}}\}\mathrm{d}x \tag{7}$$

从式(7)中可知，模糊度的成功率与模糊度浮点解的方差阵有关。当模糊度浮点解的方差越小时，模糊度的成功率就越高；反之，模糊度的成功率就越低。因此，在实际定位工作中，应尽量观测足够数量的历元数，以便减小模糊度浮点解的方差，从而提高模糊度整数估值的正确性。另外也发现，模糊度的成功率 $P(\check{a}=a)$ 与未知的模糊度真值向量 $a\in I^m$ 无关。因此，式(7)提供了计算模糊度成功率的有效方法。

用式(7)来计算模糊度的成功率时需要确定积分区间，而积分区间是由零向量的归整域来决定的。由于不同的模糊度求解方法所得到的整数估值的归整域是不同的(即相应的积分区间不同)，这就决定了相应于这些方法模糊度的成功率也不相等。因此，从某种意义上说，一种求解模糊度整数解方法的优劣完全取决于其零向量归整域的形状；另一方面，由于式(7)没有给出零向量归整域的具体形状，因此可以说，这个公式是适用于各种方法的通用计算公式。

4 结 语

对于评价模糊度整数解的正确性而言，基于三步的传统假设检验理论是不严密的，而模糊度的成功率才是评价模糊度整数解正确性的严密尺度。当模糊度的成功率足够大时，才能说这个模糊度整数解是正确的，相应的定位结果才是安全的。另外，根据式(7)可知，模糊度的成功率与模糊度浮点解的方差阵有关。因此，在实际定位工作中，应尽量观测足够数量的历元数，以便减小模糊度浮点解的方差，从而提高模糊度整数估值的正确性。同时，模糊度的成功率与未知的模糊度真值向量无关，这为在实际工作中寻求模糊度成功率计算方法提供了可能。当然，关于用模糊度成功率来研究模糊度可靠性的理论，还有很多的工作要做，因此，关于各种模糊度求解方法的成功率的具体计算及其实例验证，限于篇幅，笔者将另文讨论。

参 考 文 献

1 Kleusberg A, Teunissen P J G. GPS for Geodesy. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998

2 Koch K R. Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. New York: Springer-Verlag, 1999

3 Han S. Quality-Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real-Time GPS Kinematic Positioning. Journal of Geodesy, 1997, 71: 351～361

4 Teunissen P J G. The Success Rate and Precision of GPS Ambiguities. Journal of Geodesy, 2000, 74: 321～326

5 周忠谟, 易杰军, 周 琪. GPS卫星测量原理与应用. 北京: 测绘出版社, 1992

第一作者简介：周扬眉，博士。主要研究方向为GNSS精密定位的理论及应用。代表性成果：用于高维模糊度降相关的双Cholesky整数变换方法；回代的LAMBDA方法等。

E-mail: zhouyangmei@21cn.com

Rigor Method on Evaluating the Rightness for the Integer Solution of GPS Carried-phase Ambiguity

ZHOU Yangmei[1] *LIU Jingnan*[2] *LI Xin*[3]

(1 Research Center of GPS, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 Presidential Secretariate, Wuhan University, Luojia Hill, Wuhan 430072, China)

(3 Guangdong Nuclear Electricity Project Limited Company of China, 128 Mojiang Road, Yangjiang 529500, China)

Abstract: This paper points out the theoretic pitfall caused by evaluating the rightness of integer ambiguity solution based on the three-step approach of the traditional hypothesis test theory, and introduces the concept of the pull-in region for ambiguity and the definition of the admissible integer estimation. On the basis of the original definition for the admissible integer estimation, a new severer definition is given. On the basis of this new definition of the admissible integer estimation, the concept of ambiguity success rate is discussed and the corresponding formulas are deduced.

Key words: GPS precise positioning; integer ambiguity solution; pull-in region; admissible integer estimation; ambiguity success rate

---

About the first author: ZHOU Yangmei, Ph. D. His major research orientation includes GNSS precise positioning theory and its application. His typical achievements are: A paired Cholesky integer transformation approach to high-dimensional ambiguity decorrelation; Return LAMBDA method etc.

E-mail: zhouyangmei@21cn.com

(责任编辑: 光远)

(上接第 954 页)

SST-ll design. Assuming that the satellite pairs of SST-ll are in near circle polar orbits, the spectrum relationship between the earth gravity field and KBR is established using an analytic method. Then some examples are analyzed, the suggestions and conclusions are drawn from these examples. The research results can be a reference for future satellite gravity project of China.

Key words: SST-ll; KBR; earth gravity field; spectrum

About the first author: LUO Jia, Ph. D, majors in physical geodesy and space geodesy.

E-mail: jia972@263.sina.com

(责任编辑: 涓涓)