

地球重力场与 KBR 系统频谱关系的建立与分析

罗 佳¹ 宁津生²

(1 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

摘 要:以近极圆形轨道的 SST-II 为研究目标, 利用解析的方法分析卫星间精密测距与地球重力场的频谱关系, 得出了一般情况下 300km 高度的 SST, 星间距离每增加 100km, 恢复能力提高约 10 阶次; 对于 500km 卫星高度的 SST, 星间距离每增加 100km, 恢复能力提高约 5 阶次的结论。研究成果可以为我国发展 SST 探测地球重力场的卫星计划提供参考。

关键词:SST-II; KBR; 地球重力场; 频谱关系

中图法分类号: P223.0

搭载了精密星间 K 波段测距系统(KBR)的 GRACE(gravity recovery and climate experiment) 卫星于 2002 年成功发射, 自此, 地学工作者可以获得实用的 SST-II 观测量用于地球重力场的研究。这标志着地球重力场探测向高精度和高分辨率迈出了重要的一步^[1]。但是一方面由于 GRACE 尚未公开, 目前无法由实际数据分析 GRACE 的性能; 另一方面, 我国发展新一代卫星重力计划需要准确地把握星间精密测距与地球重力场之间的关系。国际上高水平的航天机构肯定在 GRACE 发射之前就具备了模拟分析的能力, 但是鲜见于公开文献之中, 本文就此方面展开研究。通常由 K 波段测距系统(KBR)来作为实施精密星间测距的有效载荷, 所以文中使用 KBR 来表示精密星间测距。

1 卫星间距离观测与地球重力场的频谱关系

有关重力场频谱的定义很多^[2, 3, 4], 在此不再赘述。为了使 SST-II 任务有效地覆盖全球, 尽量减小两极地区的空白带, 通常采用近极圆形轨道 LEO 卫星设计方案。在此类方案中, 沿纬度方向的采样可以通过卫星相对于地面的进动实现, 通过足够的观测时间可以保证观测对地球覆盖的要

求, 因而可以通过沿轨道的采样分布来分析星间测距的性能。如图 1 所示, 当实施 SST-II 的两颗

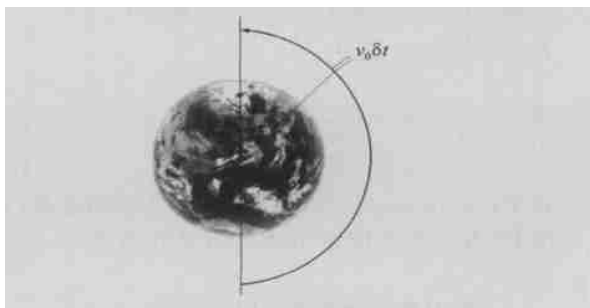


图 1 星间测距采样示意图

Fig. 1 Data Sample of KBR

地心距为 r 的卫星都以平均速度 v_0 运行, 并进行采样时间间隔为 δt 的微波星间测距时, 每周可以进行 $(2\pi r)/(v_0 \delta t)$ 次观测, 可获得地球引力信息的最高阶数为:

$$N = \frac{\pi r}{v_0 \delta t} \quad (1)$$

式中, r 为卫星质心到地心的距离; v_0 为卫星运行的平均速率; δt 为 SST 采样间隔。

根据 Kepler 定律, 卫星的平均运动角速度 \bar{n} 可以表示为:

$$\bar{n}^2 \cdot a^3 = GM \quad (2)$$

式中, a 为卫星轨道长半轴, 对于近圆形轨道, $a \approx r$ 。而 v_0 为:

$$v_0 = r \cdot \dot{n} \tag{3}$$

则式(1)可以表示为:

$$N = \frac{\pi}{\delta} \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{4}$$

GM 为地心引力常数。

对于近似圆轨道,相距数百公里卫星对之间的 SST 的观测量——视线速度 V_{lsv} 和视线加速度 A_{ksa} 实际上反映了两颗卫星的动能差,所以可将运动的能量积分与引力位之差相联系。由文献 [2] 有关 SST 的描述,经过合理近似,下面推导出用于 SST 性能分析的解析公式。

对于 SST 的任一卫星,有如下关系^[4]:

$$\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{dX_i}{dt} \right)^2 = V_1 - V_0 + C \tag{5}$$

式中, dX_i/dt 为运动卫星各方向的速率 (i 所表示的各方向必须正交); $V_1 - V_0$ 为历元间卫星处的位差; C 为积分常数。

式(5)等号的左边表示卫星的动能,对于圆形轨道,可以分别得出两卫星的动能为:

$$E_1 = \frac{1}{2} [v_0^2 + v_R^2 + v_N^2]$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [(v_0 + v_2)^2 + (v_R + v_1)^2 + (v_N + v_3)^2] \tag{6}$$

式中, v_R 、 v_0 、 v_N 为卫星 1 在 RTN 方向的速率;其沿 RTN 三方向的微小速度增量分别为 v_1 、 v_2 、 v_3 。

一对卫星的动能差可以表示为:

$$\delta E = E_2 - E_1 =$$

$$\frac{1}{2} [2v_0v_2 + v_2^2 + 2v_Rv_1 + v_1^2 + 2v_Nv_3 + v_3^2] \tag{7}$$

对于圆形轨道,式(7)中等号右边括弧中的第 2 项到第 6 项都远小于第 1 项,故上式可近似为:

$$\delta E \approx v_0v_2 \tag{8}$$

又因为

$$\delta E = V_1 - V_0 \tag{9}$$

$$V_1 - V_0 = \frac{\partial V}{\partial M} \cdot \frac{dM}{dt} \cdot \Delta t = \frac{\partial V}{\partial M} \cdot M \cdot \Delta t \tag{10}$$

式中, M 为卫星的平近点角; $M \cdot \Delta t$ 为卫星 1 和卫星 2 的地心夹角。所以有:

$$v_0v_2 \approx \frac{\partial V}{\partial M} \cdot M \cdot \Delta t \tag{11}$$

对于近圆形轨道,由式(2)和式(3)可得:

$$v_0^2 = r^2 \cdot \frac{GM}{a^3} \approx \frac{GM}{r} \tag{12}$$

由式(11)和式(12)可以得到 v_2 的功率谱为:

$$V_n^2\{v_2\} = \frac{r}{GM} V_n^2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial M} \cdot M \cdot \Delta t \right\} = \frac{r}{GM} (M \cdot \Delta t)^2 V_n^2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial M} \right\} \tag{13}$$

由于引力位沿平近点角方向的变化是由摄动位 R 直接引起的,对于圆形极轨道卫星有如下关系:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial M} \right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2 \tag{14}$$

而平均位 V 的定义为:

$$V = R + \frac{GM}{r} \tag{15}$$

所以有:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial R}{\partial \phi} = \frac{GM}{r} \sum_{b=1}^2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n C_{bnm} \frac{\partial Y_{bnm}}{\partial \phi} \tag{16}$$

根据 Y_{bnm} 的定义, $\partial Y_{bnm}/\partial \phi$ 并不改变式(16)的频谱特性,故 $\partial V/\partial \phi$ 具有与 R 一致的功率谱:

$$V_n^2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial M} \right\} = V_n^2 \{R\} \tag{17}$$

将式(17)代入式(13),得:

$$V_n^2\{v_2\} = \frac{r}{GM} (M \cdot \Delta t)^2 V_n^2\{R\} \tag{18}$$

根据 Kaula 规则,摄动位的功率谱可表示为:

$$V_n^2\{R\} = \left(\frac{GM}{r} \right)^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \cdot 1.6 \times 10^{-10} \cdot n^{-3} = \left(\frac{GM}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} \cdot 1.6 \times 10^{-10} \cdot n^{-3} \tag{19}$$

又因

$$\rho = r \cdot M \cdot \Delta t \tag{20}$$

将式(19)和式(20)代入式(18),可得:

$$V_n^2\{v_2\} = \frac{r}{GM} \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \left(\frac{GM}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} \cdot 1.6 \times 10^{-10} \cdot n^{-3} \tag{21}$$

在此先引入 SST 观测量视线距离 D_{ksd} 、视线速度 V_{ksv} 和视线加速度 A_{ksa} ^[5,6]。当卫星对之间的距离足够近时,卫星 1 的沿轨方向与卫星对的视线方向几乎重合,故 V_{ksv} 的功率谱可以表达为:

$$V_n^2\{V_{lsv}\} = \frac{GM}{r} \left(\frac{\rho}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} \cdot 1.6 \times 10^{-10} \cdot n^{-3} \tag{22}$$

式中, a_e 为地球赤道半径; r 为卫星质心到地心的距离长度; ρ 为卫星间距离; n 为阶数。

由于星间测距误差的存在,实际可得到的引力位的最高阶数小于由式(1)得到的 N , 即

$$N < \frac{\pi r}{v_0 \delta t} \quad (23)$$

假设 V_{lsv} 的测量误差为白噪声, 其方差为 σ_{lsv}^2 , 则测量噪声谱为:

$$V_n^2 \left\{ \sigma_{\text{ksv}} \right\} = \frac{\sigma_{\text{ksv}}^2}{N} \quad (24)$$

KBR 系统可反映的最高地球重力场引力信号是指当信号的谱与 V_{lsv} 测量误差的谱相等时的阶数 n , 即为该系统可反映的引力位最大阶数。 n 满足下列关系:

$$\frac{GM}{r} \left(\frac{\rho}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} \cdot 1.6 \times 10^{-10} \cdot n^{-3} = \frac{\sigma_{\text{ksv}}^2}{N} \quad (25)$$

根据大地水准面和重力异常与摄动位的关系可建立大地水准面高与 V_{ksv} 观测量的频谱关系:

$$V_n^2 \left\{ N \right\} = \frac{r}{\gamma_e} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^2 \left(\frac{r}{a_e} \right)^{2n+2} \cdot V_n^2 \left\{ V_{\text{ksv}} \right\} \quad (26)$$

由式(26)和式(24)可以得到大地水准面高的误差谱:

$$\sigma_n^2 \left\{ N \right\} = \frac{r}{\gamma_e} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^2 \left(\frac{r}{a_e} \right)^{2n+2} \frac{\sigma_{\text{lsv}}^2}{N} \quad (27)$$

同理, 可建立重力异常与 V_{lsv} 观测量的频谱关系:

$$\begin{aligned} V_n^2 \left\{ \Delta g \right\} &= \frac{r \gamma_e}{a_e^2} (n-1)^2 \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^2 \left(\frac{r}{a_e} \right)^{2n+2} \cdot V_n^2 \left\{ V_{\text{lsv}} \right\} \\ &= r \gamma_e (n-1)^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 \left(\frac{r}{a_e} \right)^{2n+2} \cdot V_n^2 \left\{ V_{\text{lsv}} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

由式(28)和式(24)可得重力异常的误差谱:

$$\sigma_n^2 \left\{ \Delta g \right\} = r \gamma_e (n-1)^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 \left(\frac{r}{a_e} \right)^{2n+2} \cdot \frac{\sigma_{\text{lsv}}^2}{N} \quad (29)$$

另外, KBR 测量中 D_{ksd} 和 A_{ksa} 的精度通常不给出, 基于 D_{lsd} 或 A_{ksa} 与 V_{lsv} 具有下列关系:

$$\begin{aligned} V_{\text{lsv}_t} &= \frac{D_{\text{ksd}_{t+\delta t}} - D_{\text{lsd}_t}}{\delta t} \\ A_{\text{ksa}_t} &= \frac{V_{\text{lsv}_{t+\delta t}} - V_{\text{lsv}_t}}{\delta t} \end{aligned} \quad (30)$$

式中, D_{lsd_t} 、 V_{lsv_t} 、 A_{ksa_t} 为 t 时刻的 SST 观测量; δt 为 KBR 采样间隔。

假设 KBR 系统测距的精度与时间无关, 就可以根据下式进行估算:

$$\sigma_{\text{ksd}}^2 = \frac{\delta t^2 \cdot \sigma_{\text{ksv}}^2}{2}, \quad \sigma_{\text{ksa}}^2 = \frac{2 \cdot \sigma_{\text{ksv}}^2}{\delta t^2} \quad (31)$$

式中, σ_{ksd} 、 σ_{ksv} 、 σ_{ksa} 分别为 SST 观测量的精度。

2 模拟分析

基于以上解析方法可以进行有关星间距离和卫星高度等方面的分析。卫星间距的大小与 SST 系统的分辨率密切相关, 同时 KBR 的性能限制了卫星间距离。若使用精度为 1.0×10^{-6} m/s、采样率为 10s 的 KBR 系统, 对于下列卫星高度的 SST 所需要的最小星间距离如表 1 所示, 表中采样率为 10s。

表 1 星间距离分析/ km

轨道高度	阶次		
	90 阶	120 阶	150 阶
300	221. 625	1 354. 789	7 517. 637
400	853. 910	8 152. 963	70 660. 307
500	3 225. 714	47 790. 702	642 714. 186

由表 1 可以看出, 适当地增加卫星间距离将有助于 SST 系统分辨率的提高。

如果已知 KBR 系统的性能, 可以分析由系统提供不同 SST 配置恢复地球重力场引力位系数的能力。如果采样率为 10s 的 KBR 系统的测距精度为 1.0×10^{-6} m/s, 则不同的 SST 系统配置(卫星高度、星间距离)恢复地球重力场引力位系数的能力如表 2 所示。

表 2 恢复地球重力场位系数的能力/ 阶次

轨道高度	星间距离		
	100km	200km	300km
300km	77	88	95
400km	63	71	76
500km	54	61	64

通过表 2 可以很直观地看出: ① 对于 300km 卫星高度的 SST, 星间距离每增加 100km, 恢复能力提高约 10 阶次; ② 对于 500km 卫星高度的 SST, 星间距离每增加 100km, 恢复能力提高约 5 阶次; ③ GRACE 计划(最大星间距离 270km, KBR 测距精度优于 1.0×10^{-6} m/s)恢复地球引力场信息的能力在 100 阶次左右。

对于非主要研究地球重力场的其他领域, 有时仅给出 SST 系统恢复地球重力场引力位系数的能力仍不直观。这些领域需要的是大地水准面高或重力异常表示的指标。表 3、表 4 分别列出了 KBR 测距精度为 1.0×10^{-6} m/s、采样率为 10s、300km 星间距离的情况下, 不同轨道高度的 SST 系统配置恢复大地水准面的能力和恢复重力异常的能力。

表3 恢复大地水准面性能分析/m

Tab. 3 Geoid Recovery Analysis of Satellite Pair/m

轨道高度	空间分辨率		
	133km	167km	222km
300km	3.717	0.936	0.236
400km	30.590	4.933	0.795
500km	251.586	26.144	2.717

表4 恢复重力异常性能分析/mGal

Tab. 4 Gravity Anomaly Analysis of Satellite Pair/mGal

轨道高度	空间分辨率		
	133km	167km	222km
300km	79.243	15.668	2.869
400km	663.781	84.393	9.963
500km	5 517.343	453.244	34.631

表3和表4表明,目前正在实施的GRACE计划可以以222km的分辨率恢复大地水准面的精度达到0.236m,恢复重力异常的精度约为2.869mGal.

3 结语

1)适当地增加卫星间距离将有助于SST系统分辨率的提高。

2)表3和表4的结论虽然与目前公布的GRACE恢复重力场的能力有一定出入,但是基本上反映了GRACE的性能,也印证了方法的可行性。

3)式(14)是基于倾角为 90° 的理想圆轨道推导出的,为了提高解析方法的准确性,需要更严密的推导。张传定博士给出了很好的建议,即引入瞬时轨道面的大地方位角 A ,式(14)的严密表达式如下:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos A + \frac{\partial V}{\cos \varphi \partial \lambda} \sin A \quad (32)$$

进而可以得出更为严密的解析表达式。

4)由分析和结论可以看出,解析方法由于需要近似,对于定性和初步定量分析是可行的,但是在精度和可靠性方面不足以保证SST计划的顺利实施,所以后续的工作还需建立在精度更高、实现更复杂的数值方法之上。

参 考 文 献

- 1 宁津生. 跟踪世界发展动态 致力地球重力场研究. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(6): 471~474
- 2 库尔特·拉姆贝克. 地球物理大地测量学——地球的慢形变. 黄立人, 沈建华, 张中伏, 等译. 北京: 测绘出版社, 1995
- 3 海斯卡涅 W A, 莫里斯 H. 物理大地测量学. 卢福康, 胡国理, 译. 北京: 测绘出版社, 1979
- 4 Kaula W M. Theory of Satellite Geodesy. Waltham-London: Blaisdell Publishing Company, 1966
- 5 宁津生, 罗佳, 汪海洪. 地球外部引力场引起卫星间距离变化的数值模拟研究. 武汉大学学报·信息科学版, 2003, 28(6): 636~641
- 6 罗佳. 利用卫星跟踪卫星确定地球重力场的理论和方法. [博士论文]. 武汉: 武汉大学, 2003
- 7 Kirschner M, Montenbruck O, Bettadpur S. Flight Dynamics Aspects of the GRACE Formation Flying. The 2nd International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, Haifa, Israel, 2001
- 8 Mazanek D D, Kumar R R, Qu M, et al. Aerothermal Analysis and Design of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Spacecraft, NASA/TM-2000-210095, 2000

第一作者简介: 罗佳, 博士. 现从事物理大地测量和空间大地测量研究.

E-mail: jia927@263.sina.com

Establishment and Analysis of the Spectrum Relationship Between Earth Gravity Field and KBR

LUO Jia¹ NING Jinsheng²

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: Satellite-to-satellite tracking is a new technique to resolve the series of problems met in the determination of the earth's gravity field. As the key technique of SST-II, KBR can get SST-II measurements directly. So the KBR performance analysis is the first step in

(下转第1007页)

Rigor Method on Evaluating the Rightness for the Integer Solution of GPS Carried-phase Ambiguity

ZHOU Yangmei¹ LIU Jingnan² LI Xin³

(1 Research Center of GPS, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 Presidential Secretariate, Wuhan University, Luojia Hill, Wuhan 430072, China)

(3 Guangdong Nuclear Electricity Project Limited Company of China, 128 Mojiang Road, Yangjiang 529500, China)

Abstract: This paper points out the theoretic pitfall caused by evaluating the rightness of integer ambiguity solution based on the three-step approach of the traditional hypothesis test theory, and introduces the concept of the pull-in region for ambiguity and the definition of the admissible integer estimation. On the basis of the original definition for the admissible integer estimation, a new severer definition is given. On the basis of this new definition of the admissible integer estimation, the concept of ambiguity success rate is discussed and the corresponding formulas are deduced.

Key words: GPS precise positioning; integer ambiguity solution; pull-in region; admissible integer estimation; ambiguity success rate

About the first author: ZHOU Yangmei Ph. D. His major research orientation includes GNSS precise positioning theory and its application. His typical achievements are: A paired Cholesky integer transformation approach to high-dimensional ambiguity decorrelation; Return LAMB-DA method etc.

E-mail: zhouyangmei@21cn.com

(责任编辑: 光远)

(上接第 954 页)

SST-II design. Assuming that the satellite pairs of SST-II are in near circle polar orbits, the spectrum relationship between the earth gravity field and KBR is established using an analytic method. Then some examples are analyzed, the suggestions and conclusions are drawn from these examples. The research results can be a reference for future satellite gravity project of China.

Key words: SST-II; KBR; earth gravity field; spectrum

About the first author: LUO Jia Ph. D. majors in physical geodesy and space geodesy.

E-mail: jia972@263.sina.com

(责任编辑: 涓涓)