DOI:10.13203/j.whugis2004.10.012
第29卷 第10期 武汉大学学报·信息科学版 Vol.29 No.10
2004年10月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Oct. 2004

文章编号:1671-8860(2004)10-0897-04 文献标识码:A

论相对论重力位及相对论大地水准面

申文斌[1] 宁津生[1] 李建成[1] 晁定波[1]

(1 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路129号,430079)

摘 要:讨论了相对论意义下的重力位及大地水准面,指出了等时率大地水准面的缺陷,建议今后采用等频面及等频大地水准面的概念,给出了等频大地水准面与经典大地水准面的差异,同时给出了等频大地水准面的近似表达式。

关键词:相对论重力位;大地水准面;等频大地水准面
中图法分类号:P223

重力测量的一个基本任务是确定地球外部重力场。经典的重力场理论以牛顿引力理论为基础,当精度要求达到或高于μGal级时,必须考虑相对论效应。这时,牛顿引力理论被爱因斯坦引力理论所代替。由于爱因斯坦引力场方程极为复杂,难以求解,因此,通常采用后牛顿引力理论(即相对论引力理论的一级近似,其中零级近似就是经典牛顿引力理论)研究重力测量问题[1],其精度为10^{-2}μGal,高于目前超导重力仪所能达到的精度(μGal)。

基于广义相对论原理[2,3],文献[4,5]给出了相对论大地水准面的定义,并提出了利用精密时钟确定大地水准面的方法;然而,文献[6,7]则指出,利用精密时钟无法确定相对论大地水准面,同时提出了等频大地水准面的概念。近年来,对确定大地水准面的精度要求已达到cm级,将来可能更高。因此,由相对论效应引起的大地水准面的偏离就不能不考虑了。另一方面,随着光信号观测频率的精度的提高,一种用光信号频移法确定重力位差(即重力位频移法)以及等频大地水准面的时代即将到来。

1 相对论重力位

重力与引力之间的差异仅仅是由于参考系选取的不同所致。同理,重力位和引力位也具有相同的类比。按广义相对论[3],度规张量$g_{\mu\nu}$具有引力位特性。参考系变换之后,$g_{\mu\nu}$作相应的变换;变换后新的度规张量与原来的度规张量没有本质区别,只是函数表达式以及变量不同而已。因此,度规张量$g_{\mu\nu}$也具有重力位特性。实际上,引力位是重力位的特例,当在准惯性系中讨论问题时,重力位就转化成了引力位。

考察原时间隔[3]:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dt dx^i + g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

式中,$d\tau$是原时,是不变标量,与参考系的变换无关;dx^μ($\mu=0,1,2,3$)是时空坐标间隔。式(1)采用了Einstein求和约定。另外,在本文中采用光速单位制,即规定$c\equiv1$。由式(1)可以写出:

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = g_{00} + 2g_{0i}v^i + g_{ij}v^i v^j \tag{2}$$

式中,$v^i = dx^i/dt$表示质点的运动速度。把方程(2)应用于重力位,由于重力位表示一种静态过程,$v^i=0$,因此,

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = g_{00} \tag{3}$$

将所有g_{00}相同的空间点连接起来,就构成了一个等位面,称为重力位等位面。也就是说,重力位等位面可表示成:

$$g_{00} = C \tag{4}$$

式中,C是常数。由式(3)和式(4)得:

收稿日期:2004-02-15。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40374004,40174004);地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(03-04-13)。

$$dt^2 = \frac{1}{C} d\tau^2 \tag{5}$$

式(5)表明，在重力位等位面上，时钟的运行速率相同。基于这一方程，文献[1,4,5]定义：重力位等位面是这样一个封闭曲面，在这个曲面上的所有精密时钟的运行速率相同。按这种方式定义的重力位等位面可称为等时率面。

在重力位等位面上，时钟的运行速率相同，因而时钟（包括原子钟）的振动频率也必定相同。这就是说，如果有两点 A 和 B 位于重力位等位面上，那么，这两点之间不存在重力频移。基于这一观点，可定义：重力位等位面是这样一个封闭曲面，其上不存在重力频移[6,7]。

2 相对论大地水准面

相对论大地水准面的概念最先由 Bjerhammar 提出[4,5]。他定义：相对论大地水准面是一个最接近于平均海水面的封闭曲面，在这个曲面上的所有精密时钟的运行速率相同。显然，这一定义的基础是等时率面，因而亦可称之为等时率大地水准面。根据上述定义，可以利用精密时钟确定相对论大地水准面。由方程(4)和(5)可以写出：

$$dt = \sqrt{\frac{1}{C}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} d\tau \tag{6}$$

式(6)给出了时钟在任意一个等时率面（即重力位等位面）上时钟的运行速率。假定相对论大地水准面 S_0 由方程

$$g_{00} = C_0 \tag{7}$$

给出，而任意一个等时率面 S_h 由方程

$$g_{00} = C_h \tag{8}$$

给出，则有：

$$dt_h = \sqrt{\frac{C_0}{C_h}} dt_0 \tag{9}$$

式中，dt_0 和 dt_h 分别是精密时钟在 S_0 面和 S_h 面上的守时速率。从原理上来说，根据方程(9)可以利用精密时钟测定出地球表面上任意一点的重力位。有了地球表面的重力位，就可以通过解边值问题确定整个地球外部的重力位及重力场了，这是优于经典方法的地方。按经典大地测量无法直接测定地面点的重力位，只能通过间接方法推求，如采用水准测量联合重力测量的方法。采用精密时钟（原子钟）确定重力位的精度取决于时钟的精度。目前原子钟的精度已可望达到 10^{-16} 量级，由此确定的重力位的精度相当于 1m 的高程差[4~7]。

以等频面为基础，文献[6,7]定义：大地水准面是一个最接近于平均海水面的等频面。如此定义的大地水准面称为等频大地水准面。按照等频大地水准面的概念，可以通过频移观测来确定等频大地水准面。同样，根据频移观测，可以确定整个地球表面的重力位，从而通过解边值问题确定整个地球外部的重力位及重力场。由于频率与周期互为倒数关系，而单位秒长是根据周期来定义的，因此，由方程(9)可直接写出：

$$f_h = \sqrt{\frac{C_h}{C_0}} f_0 \tag{10}$$

式中，f_0 和 f_h 分别是时钟在等频大地水准面 S_0 上和等频面 S_h 上的振动频率，根据频移观测可以确定 $(f_h - f_0)/f_0$。因此，只要事先选定或确定了大地水准面常数 C_0，则根据方程(10)即可确定 C_h。这里需要指出，假定事先选取的大地水准面常数 C_0 有误差，则按频移法确定的地球表面的重力位存在重力位漂移。这是一项系统误差，可以求解出来[8]。

然而，等频大地水准面具有比等时率大地水准面更为牢固的基础。即使广义相对论不适用于定义大地水准面（即等时率大地水准面的定义不能成立），等频大地水准面的定义仍然是有效的。因为这一定义的基础是频移方程，而这一方程可以采用量子力学原理推论出来[6,9,10]。文献[9]曾经论证，在均匀引力场中，所有时钟的运行速率相同。但在均匀引力场中，尽管空间各点的引力相同，但引力位并不相同。因此，采用等时率大地水准面的定义会产生不确定性问题。正是基于上述考虑，建议今后采用等频面以及等频大地水准面的定义。

引进了等频面和等频大地水准面的概念之后，可以预期在不远的将来即可实现重力位的直接测量。基本原理可陈述如下[6,7]：假定分别有一个光信号频率发射机和接收机，它们分别位于 A 和 B 两点。A 处的发射机以频率 f 发射光信号，B 处的接收机接收到的频率为 f'。利用如下重力位频移方程：

$$\Delta W_{AB} = W_B - W_A = c^2 (f' - f)/f$$

即可求出 A 和 B 两点之间的重力位差，其中 c 为真空中光速。如果在整个地球表面都进行了频移测量，那么，除了一个未知的常数位之外，便可求出整个地球表面的重力位。如果确定了一个基准点，它位于等频大地水准面上，则可确定等频大地水准面的位置。

3　等频大地水准面与经典大地水准面的差异

为了探讨等频大地水准面与经典大地水准面的差异, 需要写出两种水准面的具体方程形式。经典大地水准面定义为:

$$W(x, y, z) = C_{cl} \tag{11}$$

式中, C_{cl}是经典大地水准面常数;

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + Q(x, y, z) \tag{12}$$

是牛顿重力位, 其中 V 是牛顿引力位, 可表示成:

$$V(P) = G\int_{\Omega} \frac{\rho(r')}{l} \mathrm{d}\tau' \tag{13}$$

积分在整个地球域 Ω 进行; Q 是离心力位, 可表示成:

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{14}$$

式中, ω 是地球自转角速度。在方程(13)中, $\rho(r')$是在体元 $\mathrm{d}r'$处的质量密度; $l = |r' - r|$是场点$P(x, y, z)$至体元$\mathrm{d}\tau'$的距离, r 和r'分别是地心至场点 $P(x, y, z)$及体元 $\mathrm{d}\tau'$的向径。由式(11)~式(14), 经典大地水准面可表示成:

$$G\int_{\Omega} \frac{\rho(r')}{|r' - r|}\mathrm{d}\tau' + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C_{cl} \tag{15}$$

这里, 经典大地水准面常数 C_{cl}取这样的值, 使得由式(15)确定的封闭曲面最接近于平均海水面。

等频大地水准面由方程(7)决定。按后牛顿近似, 在地心恒星参考系(准惯性参考系)中考察, 精确到 v^4, g_{00}可表示成[3]:

$$g_{00} = -1 - 2\phi - 2\phi^2 - 2\psi \tag{16}$$

其中第一牛顿引力位 $\phi = -V$ 和第二牛顿引力位 ψ分别由下式给出[3]:

$$\phi \equiv -V = -G\int_{\Omega} \frac{\rho(r')}{l} \mathrm{d}\tau'$$

$$\psi = -\int \frac{1}{l}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + G\overset{2}{T}{}^{00} + G\delta_{ij}\overset{2}{T}{}^{ij}\right]\mathrm{d}\tau' \tag{17}$$

式中, $T^{\mu\nu}$是能量动量张量。在地固质心参考系中考察, 精确到 v^4, g_{00}可表示成[10]:

$$g_{00} = -1 - 2\phi + \omega^2(x^2 + y^2) - 2\phi^2 - 2\psi - 2\omega^2(x^2 + y^2)\phi - \frac{4G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) \tag{18}$$

式中, $J = 2R^2 M\omega/5$是地球的自转角动量。将方程(18)代入方程(7), 等频大地水准面可表示为:

$$-\phi + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \phi^2 - \psi - \omega^2(x^2 + y^2)\phi - \frac{2G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) = \frac{C_0 + 1}{2} \equiv C_{\mathrm{rel}} \tag{19}$$

比较等频大地水准面(19)与经典大地水准面(15)可以看出, 假如规定 $C_{\mathrm{rel}} = C_{cl}$, 则二者相差的量为:

$$\delta\Gamma = -\phi^2 - \psi - \omega^2(x^2 + y^2)\phi - \frac{2G}{r^3}J\omega(x^2 + y^2) \tag{20}$$

它的数量级是 v^4, 或者说 ϕ^2。就误差估计而言, 近似地有:

$$|\delta\Gamma| \sim \phi^2 \sim \frac{2}{3}\times 10^{-9}\,|\phi|$$

由于$|\delta\Gamma|$可被解释为两种水准面之间的重力位差, 因而两个水准面之间的距离即可由著名的 Bruns 公式求出[11]:

$$\delta h = \frac{|\delta\Gamma|}{\frac{GM}{R^2}} \approx \frac{2}{3}\times 10^{-9}R$$

在大地水准面附近, 取 $R = 6.4\times 10^8\,\mathrm{cm}$, 得:

$$\delta h \sim 0.4\,\mathrm{cm}$$

由此可见, 等频大地水准面与经典大地水准面的差异大约 0.5cm。随着科学技术的发展, 对确定大地水准面的精度要求越来越高, 目前已提出了确定 cm 级大地水准面的要求。在此精度要求之下, 尚毋需考虑等频大地水准面与经典大地水准面的区别。如果再提高精度要求, 就有必要考虑上述两种水准面的差异。另一方面, 引进等频面和等频大地水准面的概念之后, 可以采用重力位频移法确定地球表面的重力位, 从而直接求解地球外部的重力位和重力场(如采用虚拟压缩恢复法[12])。

4　等频大地水准面的近似表示

进一步考察等频大地水准面。按惯用的引力位表示法, ϕ 用 $-V$ 来代替, 并用 Q 表示离心力位$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$, 则式(19)可表示成:

$$V + Q - V^2 - \psi + 2QV - \frac{4G}{r^3}\frac{J}{\omega}Q = C_{\mathrm{rel}} \tag{21}$$

在地固质心参考系中, V 与时间无关, 由式(17)得:

$$\psi = -\int_{\Omega} \frac{1}{l}\left[G\overset{2}{T}{}^{00} + G\delta_{ij}\overset{2}{T}{}^{ij}\right]\mathrm{d}\tau' \tag{22}$$

式中, T^{ij} 表示动量流密度, 在地固质心参考系中为零。又

$$T^{00} = \overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{00} + \cdots$$

式中, T^{00}表示物质的密度。当取定 $\overset{2}{T}{}^{00} = T^{00}$时, $\overset{2}{T}{}^{00} = 0$。但一般情况下不知道密度分布, 在计算 V 时只能取近似的密度值 $\overset{0}{T}{}^{00}$ 作为一级近似。于

是，$\overset{2}{T}{}^{00}=T^{00}-\overset{0}{T}{}^{00}$ 表示剩余密度值，记为 $\delta\rho$，则式(22)可表示成：

$$\psi=-\int_{\Omega}\frac{\delta\rho}{l}\mathrm{d}\tau' \qquad (23)$$

将式(23)与式(17)的第一式比较可知，$|\psi|$ 比 V 要小得多。假定 V 尽可能精确，则 ψ 可以略去(当 V 趋于真值时，φ 趋于零)。另外，就大地水准面而言，Q 比 V 要小得多。因此，相比之下，QV 比 V^2 小得多。又因

$$\frac{4G}{r^3}\frac{J}{\omega}Q=\frac{4G}{r^3}\frac{2R^2M}{5}Q\approx\frac{8}{5}VQ\ll V^2$$

于是，式(21)可表示成(准确到 V^2)：

$$V+Q-V^2=C \qquad (24)$$

5 结 语

假如将来能实现重力位频移观测，并假定整个地球表面的重力位均已通过测量而得知，那么，就可以利用推广的 Bruns 公式(即精确到高程的二阶量，而通常的 Bruns 公式只精确到一阶量)确定大地水准面的位置。正如前面已经指出的，在目前的 cm 级精度要求之下，毋需考虑等频大地水准面与经典大地水准面的差异。另一方面，可以采用虚拟压缩恢复法精确确定地球外部的重力场[12]。

参 考 文 献

1 Soffel M H, Herold H, Ruder H, et al. Relativistic Theory of Gravimetric Measurements and Definition of the Geoid. Manuscript Geodaetica, 1988, 13: 143～146

2 Eienstein A. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber Preuss Akad Wiss, 1995. 778～786

3 Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New York: John Wiley & Sons, 1972

4 Bjerhammar A. On a Relativistic Geodesy. Bulletin Géodésique, 1985, 59: 207～220

5 Bjerhammar A. Relativistic Geodesy. NOAA Technical Report NOS 118 NGS 36, Rockville, MD., 1986

6 Shen W B, Chao D B, Jin B R. On the Relativistic Geoid. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1993, 52: 207～216

7 Shen W B, Chao D B, Jin B R. The Concept and Application of the Equifrequency Geoid. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1994, 19: 232～238 (in Chinese)

8 Shen W B, Ning J S, Chao D B. A New Method for Determining the Geoid Potential Constant. Private Communication, 2003 (in Chinese)

9 Shen W B, Chao D B, Jin B R. On the Clock's Running Rates in Gravitational Field. Astronomy Literature & Information, 1993, 6: 9～14 (in Chinese)

10 Shen W B. Relativistic Physical Geodesy. Habilitation. Institute of Theoretical Geodesy, Graz Technical University, 1997

11 Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Freeman and Company, 1967. 82～85

12 申文斌. 引力位虚拟压缩恢复法. 武汉大学学报·信息科学版, 2004, 29(8): 720～724

第一作者简介：申文斌，博士，教授，博士生导师。研究方向为大地测量和地球物理学。
E-mail: wbshen@sgg.wtusm.edu.cn

On the Relativistic Geopotential and Relativistic Geoid

SHEN Wenbin[1] *NING Jinsheng*[1] *LI Jiancheng*[1] *CHAO Dingbo*[1]

(1 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: This paper carefully examines the definition of the relativistic geoid, firstly in this paper, and suggests to apply the equi\|frequency surface and the equi-frequency geoid to geodesy in the future. The possible direct measurements of determining the geopotential on the earth's surface as well as the equi-frequency geoid are proposed. The difference between the classic geoid and the equi-frequency geoid should be considerd, which has been investigated and concluded to be around 0.5 cm. Moreover, the expression of the equi-frequency geoid is given.

Key words: relativistic geopotential; geoid; equifrequency geoid

About the first author: SHEN Wenbin, Ph.D, Ph.D supervisor, professor. His main research orientation is geodesy and geophysics.
E-mail: wbshen@sgg.wtusm.edu.cn

(责任编辑： 平子)