

拓扑关系形式化描述的 Euler 示性数模型

邓 敏¹ 张雪松² 林宗坚³

(1 南京大学城市与资源学系, 南京市汉口路 22 号, 210093)

(2 武汉大学空间信息与数字工程研究中心, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(3 中国测绘科学研究院, 北京市海淀区北太平路 16 号, 100039)

摘 要: 给出了空间目标的一般表达式, 并利用代数运算和集合运算相结合的方法计算出空间目标的拓扑边界和内部。针对空间目标点集拓扑运算所得集合的非闭性, 提出了一种适合于 Euler 示性数计算的方法, 建立了一种形式化描述拓扑关系的 Euler 示性数模型。实例证明了所提方法和形式化模型的正确性。

关键词: 单纯剖分; 拓扑关系; 形式化方法; 分离数

中图法分类号: P208

拓扑关系是 GIS 中空间目标之间最基本也是最重要的关系之一, 是进行空间查询、分析和推理的基础^[1]。自 20 世纪 80 年代以来, 地理信息科学和计算机科学领域的学者们对拓扑关系的形式化方法进行了大量研究, 其中较有代表性的成果有 4 交叉模型^[2]、9 交叉模型^[3] 和 RCC 模型^[4]。近年来, 陈军等人针对 9 交叉模型的不足提出了 V9I 改进模型^[5]; Li 等人利用多个集合算子建立了空间代数模型^[6], 随后发展了 Voronoi 空间代数模型^[7]。Voronoi 图的几何结构是一个与距离变换密切相关的函数, 并且这种特性与拓扑关系的形式化方法是相矛盾的。拓扑关系是拓扑变换下的不变量, 是一种与空间目标的距离、方向等度量概念无关的定性关系^[2], 因此, V9I 模型和 Voronoi 空间代数模型并不是一种纯拓扑的形式化模型。一些学者通过纳入不同的拓扑不变量对 4 交叉或 9 交叉模型进行了扩展^[8-10], 但是, 现有研究在拓扑不变量的定义和计算方面的一些基本问题仍未得到较好的解决。

1 基于单纯剖分的空间目标表达

1.1 单纯形的形式化表达

定义 1 设 v_0, v_1, \dots, v_k 是 n -维欧氏空间 E^n 内的 $k+1$ ($k \leq n$) 个独立点, 这些点构成的最

小凸集 S_k 叫作一个 k 维单纯形(简记 k -单纯形), 可表达为线性组合 $S_k = \{v \mid v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k\}$, 其中 λ_i 为非负实数, 并且满足 $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ 。

由定义 1 可知, 一个 n -单纯形是一个凸 n 面体。特别地, 当 $k=0$ 时, 0-单纯形 S_0 为一个独立点; 当 $k=1$ 时, 1-单纯形 S_1 为一条线段; 类似地, 2-单纯形 S_2 对应着一个三角形。几何上, 一个 2-单纯形 S_2 则可表达为一个全集信息, 即

$$S_2 = \{v_1 v_2 v_3, v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_1, v_2, v_3\} \quad (1)$$

式中, v_1, v_2 和 v_3 为 0-单纯形的顶点; $v_1 v_2, v_2 v_3$ 和 $v_3 v_1$ 为 1-单纯形的线段; $v_1 v_2 v_3$ 为 2-单纯形的三角形, 或者等价表达为:

$$S_2 = \bigcup_{i=0}^2 S_i(\circ) \quad (2)$$

其中, $S_i(\circ)$ 分别为所有 i -单纯形构成的集合。对于单纯形的定向, 可以分别描述为: 0-单纯形没有方向; 1-单纯形(如 $v_1 v_2$)方向可定义为从 v_1 到 v_2 , 反之, 为从 v_2 到 v_1 , 但不等价; 2-单纯形的方向可定义为顺时针或逆时针方向。但是任何一个单纯形都由其顶点惟一确定, 于是, 可将一个 2-单纯形等价表达为如下代数形式:

$$S_2 = \langle v_1 v_2 v_3 \rangle \equiv \langle v_2 v_3 v_1 \rangle \equiv \langle v_3 v_1 v_2 \rangle \quad (3)$$

1.2 单纯复形的形式化表达

定义 2 欧氏空间 E^n 中一组有限个单纯形构成的图形称作一个单纯复形。

从定义可知, 假如某个单纯形属于单纯复形, 则它的每个面也属于单纯复形。进一步地, 如果两个单纯形相接, 则相接部分是一个公共面。

定义 3 对于一个单纯复形 C , 它的维数为所构成的单纯形的最大维数, 即

$$\dim(C) = \max\{\dim(S_i)\}, S_i \in C$$

进一步地, 根据单纯复形维数与构成它的极大单纯形的维数之间的关系来定义纯单纯复形。

定义 4 如果一个单纯复形 C_k ($0 \leq k \leq n$) 中所有的极大单纯形都是 k -单纯形, 即所有构成它的极大单纯形的维数与单纯复形的维数相等, 那么称这个单纯复形为纯 k -单纯复形。

对于一个纯 k -单纯复形 C_k , 设由 m 个 k -单纯形构成, 则 C_k 可表达为:

$$C_k = \bigcup_{j=1}^m S_k^j = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=0}^k S_i^j(\circ) \quad (4)$$

式中, S_k^j 为第 j 个 k -单纯形。在 GIS 中, 一个二维空间目标 O_2 在单纯剖分后则是一个纯 2-单纯复形 C_2 , 于是, 式(4)简化为:

$$C_2 = \bigcup_{j=1}^m S_2^j = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=0}^2 S_i^j(\circ) \quad (5)$$

在实际操作中, 空间目标的单纯剖分模式可能不惟一, 但是每种模式分解得到的所有单纯形都是空间目标的一个完整镶嵌, 并且不影响空间目标的拓扑描述。

2 基于单纯剖分的空间目标拓扑描述

从拓扑的角度, 一个空间目标的描述主要包括其边界和内部的形式化定义。这里将单纯复形 C_n 的边界计算分为两个步骤。其基本思路是: 首先将 C_n 中 i -单纯形 ($0 \leq i \leq n-1$) 视为一组 i 维向量, 利用代数运算得到每维单纯形集合 $S_i(\circ)$ 的边界; 然后通过集合并运算得到单纯复形的边界。

在集合论中, 一个 k -单纯形的拓扑边界可定义为所有维数小于 k 的单纯形子集的并集。于是, 一个 2-单纯形的边界可以表达为:

$$\partial S_2 = \bigcup_{i=0}^1 S_i(\circ) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_1, v_2, v_3\} \quad (6)$$

不妨设一个二维简单面目标 O_2 是由 k 个顶点依次连接而成的, 那么它在单纯剖分过程中将产生 $(k-3)$ 个新线段和 $(k-2)$ 个新三角形, 但是

它的顶点没有改变。这些新产生的每个线段(1-单纯形)在整个单纯剖分中仅为两个三角形(2-单纯形)共有, 并且具有相反的方向。在这种情况下, 对所有具有相同维数的有序单纯形进行一个代数加运算, 则这些新产生的 1-单纯形将相互抵消。于是, 一个纯单纯复形 C_2 的边界可以表达为:

$$\partial C_2 = \bigcup_{i=0}^1 \left(\sum_{j=1}^m S_i^j(\circ) \right) = \left(\sum_{j=1}^m S_0^j(\circ) \right) \cup \left(\sum_{j=1}^m S_1^j(\circ) \right) \quad (7)$$

通过式(7)定义的拓扑边界其实也是二维空间面目标 O_2 的拓扑边界, 进而, 空间目标的内部为:

$$O_2^0 = O_2 - \partial O_2 \quad (8)$$

3 空间目标间拓扑关系的形式化模型

3.1 点集拓扑运算

在 GIS 中, 空间目标通常被视为一个普通集合参与各种运算, 常用的算子有集合并、交、差、补等。各种算子下运算的结果可能是空集或生成新的非空集合。通过分析新生成集合的拓扑特性, 则可推断出两个集合间的拓扑关系。下面以图 1 为例, A 和 B 分别表达为:

$$A = \{v_1 v_2 v_9, v_2 v_8 v_9, v_2 v_5 v_8, v_5 v_6 v_8, v_6 v_7 v_8, v_1 v_2, v_2 v_5, v_5 v_6, v_6 v_7, v_5 v_8, v_8 v_2, v_6 v_8, v_7 v_8, v_8 v_9, v_9 v_1, v_9 v_2, v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

$$B = \{v_2 v_3 v_5, v_3 v_4 v_5, v_4 v_6 v_5, v_5 v_6 v_8, v_2 v_5 v_8, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3 v_5, v_2 v_5, v_4 v_5, v_4 v_6, v_5 v_6, v_6 v_8, v_5 v_8, v_8 v_2, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8\}$$

根据式(7)和式(8), 则可计算出集合 A 、 B 拓扑分量之间运算的结果, 分别为:

$$1) A^0 \cap B^0 = \{v_2 v_5 v_8, v_5 v_6 v_8, v_5 v_8\}$$

$$2) \partial A \cap B^0 = \{v_2 v_5, v_5 v_6, v_5\}$$

$$3) A^0 \cap \partial B = \{v_2 v_8, v_6 v_8\}$$

$$4) \partial A \cap \partial B = \{v_2, v_6, v_8\}$$

其中, v_j 表示单纯形中不包含顶点 v_j 本身。

3.2 基于 Euler 示性数的拓扑关系模型

作为一个拓扑不变量, 分离数是图形集合的一个重要拓扑特性。一般地, 分离数是通过计算图形集合的 Euler 示性数得到的。在单纯剖分的基础上, 一个 n 维空间目标 O_n 的 Euler 示性数 $\chi(O_n)$ 定义为:

$$\chi(O_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \quad (9)$$

式中, a_i ($0 \leq i \leq n$) 为 O_n 中含有 i -单纯形的个

数。当 $n=2$ 时, 式(9)简化为:

$$\chi(O_2) = a_0 - a_1 + a_2 \quad (10)$$

式中, a_0 、 a_1 和 a_2 分别为 O_2 中 0、1 和 2-单纯形的个数。由于 Euler 示性数用于计算图形集合分

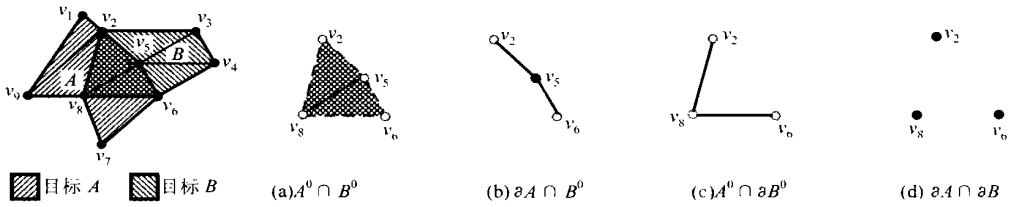


图 1 空间目标点集拓扑分量之间的运算

Fig. 1 Spatial Operations of Point-Set Topological Components

离数的一个前提条件是集合必须是闭集, 而不适用于非闭集。为了能够利用 Euler 示性数计算上述点集运算所得非闭集合的分离数, 本文提出如下的处理方法。

- 1) 取非闭集的闭包 (closure) 运算, 使得所有的非闭集都变为闭集。
- 2) 如果处理前、后集合的连通性没有发生变化, 则可以直接计算这些集合的 Euler 示性数。
- 3) 如果处理前、后集合的连通性发生变化, 则计算出闭包运算中新产生的点。由于这些点是那些分离子集相连通的唯一路径, 因此, 如果某个点属于两个相互分离子集的闭包, 则在其连通集的表达式中记录这个点两次; 如果属于 3 个相互分离子集的闭包, 则记录三次, 以此类推。

根据上述处理方法, 可计算出图 1 (a) ~ 图 1 (c) 非闭集合的 Euler 示性数, 分别为:

$$\begin{aligned} \chi(A^0 \cap B^0) &= 1 \\ \chi(\partial A \cap B^0) &= 1 \\ \chi(A^0 \cap \partial B) &= 1 \end{aligned}$$

不难发现, 处理后的计算结果与未处理前集合的分离数保持一致, 即在处理过程中并未改变 Euler 示性数度量集合分离数的特性。进一步地, 在 Egenhofer 提出的 4 交叉模型基础上纳入 Euler 示性数, 本文称为 Euler 示性数模型, 将其表达

为:

$$\gamma(A, B) = \begin{pmatrix} \chi(\partial A \cap \partial B) & \chi(\partial A \cap B^0) \\ \chi(A^0 \cap \partial B) & \chi(A^0 \cap B^0) \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中, 元素 $\chi(\cdot)$ 的取值为 $[0, +\infty)$ 。显然, Euler 示性数模型是 4 交叉模型的一种扩展。当元素取不同的值时, 则两个目标的拓扑关系也不相同。

4 算例分析

为便于比较分析, 下面以 Egenhofer (1993) 中的 6 种空间图形结构为例 (如图 2), 并利用本文提出的方法与模型进行拓扑关系形式化描述。具体步骤如下。

- 1) 对空间目标 A 和 B 形成的图形结构进行单纯剖分, 利用单纯形分别表达 A 、 B ;
- 2) 利用式(7)和(8)计算 A 、 B 的边界 (∂A 、 ∂B) 和内部 (A^0 、 B^0);
- 3) 在“交”算子下进行集合运算, 即 $\partial A \cap \partial B$ 、 $\partial A \cap B^0$ 、 $A^0 \cap \partial B$ 和 $A^0 \cap B^0$;
- 4) 按照 §3.2 提出的方法进行处理, 并利用式(9)或式(10)计算处理后所得新集合的 Euler 示性数 (即分离数);
- 5) 利用式(11)则可分别得到图 2 中各种空间图形结构的 Euler 示性数模型。

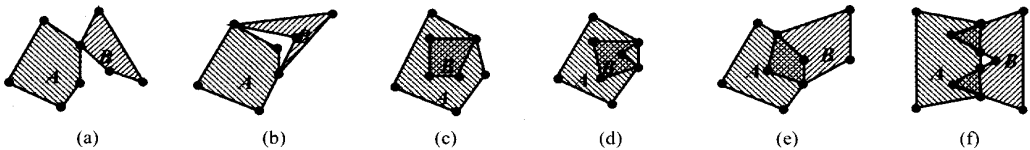


图 2 空间目标 A 和 B 形成的几种图形结构示例

Fig. 2 Several Possible Spatial Frameworks Between A and B

这里以图 2(e) 为例来说明 Euler 示性数的计算方法。首先对 A 和 B 形成的图形结构进行单纯剖分 (如图 3), 然后根据式(7)和式(8)计算得

到 A 和 B 的边界、内部, 进而计算出 $\partial A \cap \partial B$ 、 $\partial A \cap B^0$ 、 $A^0 \cap \partial B$ 和 $A^0 \cap B^0$, 分别表示为:

$$1) A^0 \cap B^0 = \{ \vec{v}_3 \vec{v}_7, \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_7, \vec{v}_3 \vec{v}_4 \vec{v}_7 \};$$

- 2) $\partial A \cap B^0 = \{v_3, \vec{v}_2 v_3, v_3 \vec{v}_4\}$;
- 3) $A^0 \cap \partial B = \{v_7, \vec{v}_2 v_7, \vec{v}_4 v_7\}$;
- 4) $\partial A \cap \partial B = \{v_2, v_4\}$.

进一步地, 根据本文所提方法进行处理, 并利

用式(10)计算 Euler 示性数。可以看出, 图 3(a)~图 3(c)都是连通的, 处理后连通性不变, 并且计算得到的 Euler 示性数都为 1, 而图 3(d)中的 Euler 示性数为 2, 即它们为两个分离的子集。

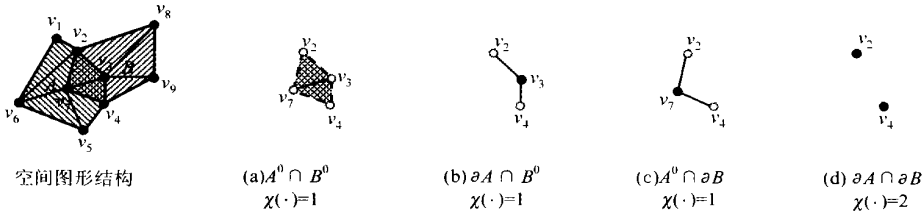


图 3 基于单纯剖分的 Euler 示性数计算方法

Fig. 3 Calculation of Euler Characteristics Based on Simplicial Decomposition

类似地, 可以计算图 2 中其他图形结构的 Euler 示性数, 如表 1 所示。为便于比较, 将 Egenhofer (1993) 描述的结果列于表 1 中最后一行。

从表 1 中可以看出, Euler 示性数模型比 4 交叉模型具有更强的区分能力。利用 4 交叉模型描述图 2 中(a)与(b)、(c)与(d)以及(e)与(f)三组空间图形结构所得的结果是一样的, 但实际上它们在拓扑上是不同的, 如图 2(a)中目标 A 与 B 相

接一次, 而图 2(b)则为两次。然而, 它们的拓扑差异在 Euler 示性数模型下可以得到区分。此外, Egenhofer (1993) 在计算图形集合的分离数时, 由于忽略操作后集合的非闭特性, 导致计算的结果没有物理意义。如图 2(f)中 $\partial A \cap B^0$ 与 $A^0 \cap \partial B$ 运算的结果都是包含有两个分离的非空子集, 这分别表明目标 A 两次穿越目标 B, 而目标 B 也是两次穿越目标 A, 因此, 它们的 Euler 示性数都应该是 2, 而不是一。

表 1 利用各种模型描述所得结果的比较

Tab. 1 Comparisons of the Derived Results from Several Formal Models

模型	图 2(a)	图 2(b)	图 2(c)	图 2(d)	图 2(e)	图 2(f)
4 交叉模型	$\begin{pmatrix} -\phi & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\phi & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\phi & \phi \\ -\phi & -\phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\phi & \phi \\ -\phi & -\phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\phi & -\phi \\ -\phi & -\phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\phi & -\phi \\ -\phi & -\phi \end{pmatrix}$
Euler 示性数模型描述的结果	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
Egenhofer(1993) 描述的结果	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4 结 语

拓扑关系是拓扑变换下的不变量, 它的区分标准是拓扑不变量, 如 Egenhofer 等人提出的内容不变量^[2]、Clementini 等人提出的维数不变量^[8]以及后来一些学者提出的序不变量^[10, 11]。这些不变量是不以空间旋转、平移、放大/缩小等变换而发生改变的。文中探讨的 Euler 示性数是一个可以用来度量图形结构特征的不变量, 它能表征空间目标相互作用后所得集合的分离数, 并且不会随单纯剖分的方式不同而改变。此外, 本文提出的 Euler 示性数计算处理方法对三维情况也是适合的, 尽管三维空间目标间的拓扑关系要

比二维情形复杂得多, 但描述和区分的标准仍然是拓扑不变量, 不同的只是所采用的拓扑不变量的类型和数量不同。

参 考 文 献

- 1 Molenaar M. An Introduction to the Theory of Spatial Object Modeling. London: Taylor & Francis 1998
- 2 Egenhofer M, Franzosa R. Point-Set Topological Spatial Relations. International Journal of Geographical Information Systems, 1991, 5 (2): 161~174
- 3 Categorizing Binary Topological Relationships Between Regions, Lines and Points in Geographic Databases. In: Egenhofer M, Herring J, eds. A Framework for the Definition of Topological Relationships and an Approach to Spatial Reasoning within This Framework, CA: Santa

- Barbara Press, 1991
- 4 Randell D, Cui Z, Cohn A. A Spatial Logical Based on Regions and Connection. In: Kaufmann M, San M, eds. The 3rd International Conference on Knowledge Representation and Reasoning. New York: Springer-Verlag, 1992
 - 5 Chen J, Li C M, Li Z L. A Voronoi-based 9-Intersection Model for Spatial Relations. International Journal of Geographical Information Sciences, 2001, 15(3): 201 ~ 220
 - 6 Li Z, Zhao R, Chen J. An Algebra Model for Spatial Relations. The 3rd ISPRS Workshop on Dynamic and Multi-dimensional GIS. Bangkok, 2001
 - 7 Li Z, Zhao R, Chen J. A Voronoi-based Spatial Algebra for Spatial Relations. Progress in Natural Science, 2002, 12(7): 528 ~ 536
 - 8 Clementini E, Di F P, Oosterom P. A Small Set for Formal Topological Relationships Suitable for End-user Interaction. In: David A, Beng C O, eds. Advances in Spatial Databases. New York: Springer-Verlag, 1993
 - 9 Egenhofer M. A Model for Detailed Binary Topological Relationships. Geomatica, 1993, 47(3/4): 261 ~ 273
 - 10 Egenhofer M, Franzosa R. On the Equivalence of Topological Relations. International Journal of Geographic Information Systems, 1995, 9(2): 133 ~ 152
 - 11 Clementini E, Di Felice P. Topological Invariants for lines. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1998, 10: 38 ~ 54

第一作者简介: 邓敏, 博士。主要研究领域为遥感与 GIS 空间数据质量、地理信息的不确定性分析与建模以及空间关系理论与应用。参加国家自然科学基金项目 3 项, 在国内外学术期刊发表研究论文 30 余篇。

E-mail: dengmin208@163.net

Modeling Topological Relations Based on Euler Characteristics

DENG Min¹ ZHANG Xuesong² LIN Zongjian³

(1 Department of Urban and Resources Sciences, Nanjing University, 22 Hankou Road, Nanjing 210093, China)

(2 Research Center of Spatial Information and Digital Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(3 Chinese Academy of Surveying and Mapping, 16 Beitaping Road, Beijing 100039, China)

Abstract: The criteria on the description and determination of topological relations are topological invariants, which may be dimension, separations, Euler characteristics etc. This paper is concentrated on some basic issues of modeling topological relations using Euler characteristics. Geometrically, a detailed investigation on the relations among simplex, complex and spatial object is made. With the introduction of the concept of pure complex, a generic representation of spatial object in the GIS field is given. Topological components of simplex, i. e. boundary and interior, are then defined through the algebraic topology. A suitable and sound pre-processing approach is put forward prior to calculation of Euler characteristics. Compared with the classic 4/9-intersection model, the model based on Euler characteristics can distinguish more details in topological aspect.

Key words: simplicial decomposition; topological relations; formalism; separations

About the first author: DENG Min, Ph. D. His research focuses on GIS and especially on spatial data modeling, data quality, formalism of spatial relations and its application. He has published 30 papers.

E-mail: dengmin208@163.net

(责任编辑: 涓涓)