

多种跟踪组合卫星重力场恢复方法初探

章传银¹ 胡建国¹ 党亚民¹ 常晓涛¹

(1 中国测绘科学研究院, 北京市海淀区北太平路 16 号, 100039)

摘要: 将卫星地面跟踪、高低卫星跟踪和低低卫星跟踪恢复重力场的原理进行统一, 导出了两种能充分综合多种跟踪观测的卫星重力场恢复基本观测方程。在建立基本观测与重力场参数的函数传输关系的基础上, 对目前存在的重力场恢复算法给出了直观的解释, 并以距离二次变率为重力场恢复的基本观测, 提出了一种能组合各种卫星跟踪观测量的动态/动力组合定轨和重力场恢复方法。

关键词: 基本观测量; 传输系数; 距离二次变率; 动态/动力组合定轨; 重力场恢复

中图分类号: P223.4; P223.0

1 卫星跟踪感应地球引力场的基本原理

1.1 地球卫星的动力方程

地球卫星在惯性坐标系中的动力方程可表示为:

$$\ddot{r} = \nabla V + f \quad (1)$$

式中, r 为卫星在惯性坐标系中的位置矢量; V 为保守引力位; f 为非保守力。 V 可按属性分为稳态地球引力位和非稳态引力位, 稳态地球引力位是指不随时间变化的地球引力位, 其梯度就是通常意义下的引力加速度 g ; 非稳态引力位是随引力位的时间变化部分, 是与潮汐、三体 and 相对论有关的时变部分, 通常可以用模型精确表达, 其梯度用 m 表示。式(1)可进一步表示为:

$$\ddot{r} = g + m + f \quad (2)$$

将其转换到地固地心坐标系中, 则有:

$$\ddot{r} = \nabla V + \nabla Z + f + m - 2\omega \times \dot{r} \quad (3)$$

式中, ω 为地球自转常数; r 为地固地心坐标系中的卫星位置向量; $\nabla Z = -\omega \times (\omega \times r)$, 为离心力位的梯度, 即离心力; $-2\omega \times \dot{r}$ 为科氏力。

1.2 卫星跟踪观测与地球引力场参数的关系

利用卫星跟踪恢复重力场的方式可归结为卫星地面跟踪 (STT, 包括 SLR、DORIS 和 PRARE)、高低卫星跟踪 (SST-hl) 和低低卫星跟

踪 (SST-ll) 三种。若卫星跟踪最基本的观测量为距离 ρ , 则有:

$$\rho = (r_2 - r_1) \cdot e^1 \quad (4)$$

式中, e^1 为视线方向的单位向量。对于 STT, r_1 为地面站的地心向量, r_2 为被跟踪卫星的地心向量; 对于 SST-hl, r_1 为高轨卫星的地心向量, r_2 为低轨卫星的地心向量; 对于 SST-ll, r_1 为后方卫星的地心向量, r_2 为前方卫星的地心向量。

对式(4)两边取导数, 得:

$$\dot{\rho} = (r_2 - r_1) \cdot \Delta v \cdot e^1 \quad (5)$$

式中, Δv 为卫星与卫星 (和地面站) 的运动速度之差, 即相对运动速度。再将式(5)两边求导, 并顾及 $\dot{e}^1 = \frac{\Delta v - \rho \dot{e}^1}{\rho}$ 得:

$$\ddot{\rho} = \Delta \dot{r} \cdot e^1 + \frac{(\Delta v \cdot e^2)^2 + (\Delta v \cdot e^3)^2}{\rho} \quad (6)$$

式中, $\Delta \dot{r}$ 为卫星与卫星 (或地面站) 在惯性参考系中的加速度之差, 即相对加速度; e^2 、 e^3 为垂直于视线方向的两个单位向量, 与 e^1 构成正交系, 因此, $\Delta v \cdot e^1$ 、 $\Delta v \cdot e^2$ 与 $\Delta v \cdot e^3$ 相互独立。

对于 STT 模式, 地面站的 r_1 、 \dot{r}_1 可通过动力模型计算和精密重力测量精密确定, 对于 SST-hl 模式, 高轨卫星的 r_1 、 \dot{r}_1 可通过精密定轨来确定。将其视为已知量, 则式(6)可转化为:

$$\ddot{\rho} = (g_2 + m_2 + f_2) \cdot e^1 + \frac{(\Delta v \cdot e^2)^2 + (\Delta v \cdot e^3)^2}{\rho} + l_2 \quad (7)$$

式中, l_2 为常数项, 忽略地面站或高轨卫星的定轨和模型误差; m_2 可以用模型精确计算。对于 SST-hl 模式, f_2 用安装在低轨卫星质心处的星载加速度计测量。式(7)就是 STT 和 SST-hl 的观测(距离二次变率 $\ddot{\rho}$ 、卫星运动速度 v_2)与被跟踪卫星的重力加速度 g_2 的基本关系式。因此, 由式(7)恢复重力场就转化为通过卫星跟踪确定距离二次变率 $\ddot{\rho}$ 和被跟踪卫星的运动速度 Δv 。

对于 SST-II 模式, 将式(3)代入式(6), 得:

$$\ddot{\rho} = \Delta \ddot{r}e^1 + \frac{(\Delta v \cdot e^2)^2 + (\Delta v \cdot e^3)^2}{\rho} = \Delta g e^1 + \Delta f e^1 + \frac{(\Delta v \cdot e^2)^2 + (\Delta v \cdot e^3)^2}{\rho} + l_2 \quad (8)$$

式(8)就是 SST-II 的观测(距离二次变率 $\ddot{\rho}$ 、低低卫星相对运动速度 Δv)与低低卫星相对重力加速度 Δg 之间的基本关系式。在 SST-II 模式中, Δf 通过安装在两颗卫星质心处的星载加速度计测量, Δm 由模型精确计算。因此由式(8)恢复重力场就转化为通过卫星跟踪确定低低卫星之间的距离二次变率 $\ddot{\rho}$ 和相对运动速度 Δv 。

由式(7)和式(8)可以看出, 不论是 STT、SST-hl, 还是 SST-II 模式, 都是通过跟踪距离随时间的变化来感应地球引力场的空间变化(即空间结构)。这就是卫星跟踪感应地球引力场的本质特征。

2 基本观测与扰动位的函数关系

2.1 利用距离二次变率恢复地球重力场

将式(7)和式(8)中的地球引力加速度用 $g = \delta g + \gamma$ 代替, 则

$$\ddot{\rho} = \delta g_2 e^1 + S(\Delta v^2/\rho) + f_2 e^1 + l'_2 \quad (9)$$

$$\ddot{\rho} = \Delta \delta g e^1 + S(\Delta v^2/\rho) + \Delta f e^1 + l'_2 \quad (10)$$

式中, δg 为卫星的扰动重力; γ 为卫星的正常重力; l'_2 为将已知量合并后的常数项; $S(\Delta v^2/\rho)$ 是 $\Delta v^2/\rho$ 的函数, 且

$$S(\Delta v^2/\rho) = \frac{(\Delta v \cdot e^2)^2 + (\Delta v \cdot e^3)^2}{\rho}$$

相对于 $\ddot{\rho}$ 来说, $S(\Delta v^2/\rho)$ 是个小量, 其大小与视线方向和距离 ρ 有关, 平均量级为 $10^{-6} \sim 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$, 在高精度重力场恢复中应予以顾及。由式(9)和式(10)可以看出, 不论是 STT、SST-hl 还是 SST-II 模式, 距离的二次变率都由四项组成, 第一项与扰动重力有关, 是恢复重力场的有效项, 第二项是相对速度的函数, 由直接观测(距离或距离速率)导出, 第三项是非保守力项, 第四项是常数

项。

将加速度与速度从惯性坐标系转换到地心地固坐标系, 代入式(9)、式(10), 并将与地球引力场参数无关的右边项合并后作为观测方程的常数项, 则由星间距离二次变率恢复地球引力场的基本观测方程可写为:

$$\ddot{\rho}_{hl} - S(\Delta v_{hl}^2/\rho_{hl}) = \delta g_2 e^1 + C_{hl} + \epsilon_{hl} \quad (11)$$

$$\ddot{\rho}_{ll} - S(\Delta v_{ll}^2/\rho_{ll}) = \delta g e^1 + C_{ll} + \epsilon_{ll} \quad (12)$$

式中, 下标 hl 表示适合 STT 或 SST-hl 模式, 下标 ll 表示适合 SST-II 模式。对于 STT 或 SST-hl 的模式, $\ddot{\rho}_{hl}$ 和 Δv_{hl} 由卫星跟踪观测确定, 处于分母上的 ρ_{hl} 可用近似值代替(比例因子)。对于类似于 GRACE 的 SST-II 模式, $\ddot{\rho}_{ll}$ 和 Δv_{ll} 应由高低跟踪和 K 波段星间测距联合确定, 处于分母上的 ρ_{ll} 也可用近似值代替。

外部地球空间任意一点处, 在球近似意义上存在下式:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \Delta g + \frac{2T}{r}$$

式中, Δg 为空间重力异常。将上式代入式(11)和式(12), 得:

$$\ddot{\rho}_{hl} - S(\Delta v_{hl}^2/\rho_{hl}) = (\Delta g + \frac{2T}{r})e^1 + C_{hl} + \epsilon_{hl} \quad (13)$$

$$\ddot{\rho}_{ll} - S(\Delta v_{ll}^2/\rho_{ll}) = \left[\Delta \Delta g + 2 \frac{\Delta T}{r} \right] e^1 + C_{ll} + \epsilon_{ll} \quad (14)$$

由上述推导过程不难看出, 利用距离二次变率恢复地球重力场不但适合 STT、SST-hl 和 SST-II 模式, 而且可以联合几种卫星跟踪模式和多个卫星跟踪任务提高地球引力场的恢复精度。

2.2 利用被跟踪卫星的速度恢复地球重力场

若采用基于 Jacobi 积分的能量守恒法建立卫星速度与地球引力场参数间的函数传递关系, 可导出由地球卫星速度恢复地球引力场的算法。

顾及离心力位 Z 与时间无关, 且

$$\frac{d(V+Z)}{dt} = \frac{d(V+Z)}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} \quad (15)$$

将被跟踪卫星的速度矢量 r 与式(3)做内积, 则有:

$$\dot{r} \cdot r = \frac{d(V+Z)}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} + f \cdot r \quad (16)$$

两边对时间 t 积分, 得:

$$\int \dot{r} \cdot r dt = V + Z + \int \left[f \cdot r - \frac{\partial V}{\partial t} \right] dt + c \quad (17)$$

式中, c 是积分常数, 称为雅可比常数。注意到

$\int \dot{r} \circ r dt = \frac{1}{2} r \circ r = E_{\text{kin}}$ 为卫星的动能, 将引力位 V 表示为正常位 U 和扰动位 T 之和, 则式(17)可写为:

$$\frac{1}{2} r \circ r = T + U + Z + \int f dr + V_t + c \quad (18)$$

式中, V_t 是引力位的时变部分, 即 $\nabla V_t = m$ 。将式(18)冠以下标, 再相减, 得:

$$\frac{1}{2} (r_2 + r_1) \circ \Delta v = DT + U_{21} + Z_{21} + \int f_2 dr_2 - \int f_1 dr_1 + V_{t21} + c_{21} \quad (19)$$

式中, DT 为低低卫星的扰动位之差。将式(18)与式(19)中与被跟踪卫星速度 r 有关的项作为重力场恢复方程的基本观测量, 其他与扰动位 T 无关的项合并作为常数项, 则被跟踪卫星速度恢复重力场的基本观测方程可表示为:

$$\frac{1}{2} r \circ r = T + C + \epsilon \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} (r_2 + r_1) \Delta v = DT + C_{21} + \epsilon_{21} \quad (21)$$

式(20)可作为 STT 或 SST-hl 模式由被跟踪卫星的速度恢复地球引力场的基本观测方程。式(21)可独立作为 SST-hl 与 SST-ll 组合模式(也可以作为 SST-ll 模式)恢复地球引力场的基本观测方程。它们都是标量方程。对于 GRACE 卫星, 卫星速度 r_1 、 r_2 由高低跟踪确定, 卫星的相对速度 Δv 由高低卫星跟踪与 K 波段星间测距联合确定。

式(17)中的积分常数 c 与时间和卫星的位置无关, 当采用等间隔积分时间时, c 始终是常数, 因此, 可将 c 作为基本观测方程的一个未知参数, 与引力场恢复一并解算。

3 地球重力场恢复算法的统一解释

实际上, 任意与被跟踪卫星轨道 (x, y, z) 有函数关系的观测量都可作为基本观测量, 如 r 、 xy 、 yz 、 zx 、 r 、 \dot{r} 、 ρ 、 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\rho}$, 且与被恢复的重力场参数存在函数关系。直接测量的重力场参数如重力梯度也可作为基本观测量。通常将基本观测量 L 与重力场参数向量 Y 的函数关系用下式表达

$$L = AY + L_0 + \epsilon \quad (22)$$

式中, L_0 为常数项; ϵ 为观测噪声; A 称为重力场参数到基本观测量的传输系数, 简称传输系数。

3.1 全球重力场恢复

从传输系数表示方法的角度分类, 卫星重力

场恢复算法可分为空域方法和时域方法两类。空域方法将传输系数用被跟踪卫星的空间坐标表示, 时域方法将传输系数用被跟踪卫星的轨道根数表示。

设 L 为卫星跟踪重力场恢复的基本观测量(如 §2.1 中的 $\dot{\rho}_{\text{hl}} - S(\Delta v_{\text{hl}}^2 / \rho_{\text{hl}})$, $\dot{\rho}_{\text{ll}} - S(\Delta v_{\text{ll}}^2 / \rho_{\text{ll}})$, 或 §2.2 中的被跟踪卫星的动能 $\frac{1}{2} r \circ r$ 、低低卫星的 $\frac{1}{2} (r_2 + r_1) \Delta v$)。将扰动重力的位系数展开式代入卫星重力场恢复的基本观测方程, 如式(11)、式(12)、式(18)或式(21), 则基本观测方程可统一表示为:

$$L = \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_{nm} + L_0 + \epsilon \quad (23)$$

式中, A_{nm} 为待估参数位系数 Y_{nm} 的系数, 即传输函数, 可由被跟踪卫星的近似空间坐标(空域法)或轨道根数(时域法)计算; L_0 为包括非保守力和动力模型的常数项; ϵ 为观测噪声, 主要包括 L 的观测误差和非保守力测量误差(非地球引力保守力模型误差可以忽略)。

对于全球重力场恢复目的, 通常将地球重力场用扰动位 T 表示, 然后利用 T 的球谐展开代入基本观测方程, 得到基本观测量与位系数之间的函数关系, 进而采用某种算法(空域方法或时域方法)估计地球引力场位系数。

3.2 局部重力场参数估计

对于局部重力场目的, 可以考虑先直接估计被跟踪卫星处的重力场参数, 如扰动重力 §2.1 或扰动位 §2.2, 然后采用 Hotine 公式或 Possion 公式(可采用最小二乘配置法)将重力场参数延拓到地面。

对于 SST-hl 模式, 若采用 $\dot{\rho}_{\text{hl}} - S(\Delta v_{\text{hl}}^2 / \rho_{\text{hl}})$ 作为基本观测量 L , 则可由高轨卫星星座对低轨卫星某一点的观测方程组估计该点的扰动重力。设某一时刻低轨卫星被 m 个高轨卫星跟踪, 则有 m 个形如式(11)的基本观测方程:

$$L_i = \hat{\rho}_g \circ e_i + C_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

式中, e_i 为低轨卫星与第 i 颗 GPS 卫星连线方向的单位向量。

利用最小二乘法解方程组(24)就可以估计低轨卫星的扰动重力矢量。实际数据处理中可采用低轨卫星的短弧采样和重复采样进行最优估计和滤波处理, 来提高扰动重力矢量的估计精度。

同理可采用式(20)估计低轨卫星的扰动位。

4 组合多种跟踪模式的重力场恢复方法

4.1 动力法定轨与引力场恢复

动力法处理卫星跟踪数据时,可联合解算被跟踪卫星的轨道和引力场位系数。以 STT 或 SST-hl 为例,设卫星跟踪的基本观测方程为:

$$L = G(r_1, r_2, r_2) + \epsilon \quad (25)$$

式中, L 为卫星跟踪的观测量(可以是距离、方向、距离一次变率中的一种或几种); G 为高轨卫星(或地面跟踪站) r_1 与被跟踪卫星状态向量 r_2 、 r_2 之间的函数关系; ϵ 为观测噪声。

被跟踪卫星在地固地心坐标系中的运动方程可由式(3)得出,即

$$\begin{cases} \dot{r}_2 = v_2 \\ \ddot{r}_2 = \nabla V + \nabla Z + f + m - 2\omega \times r_2 \\ r_2(t_0) = r_0, r_2(t_0) = v_2(t_0) = v_{20} \end{cases} \quad (26)$$

将地球引力场位系数作为待估参数(其他参数如地心坐标、地球自转参数等也可作为待估参数一并解算),即

$$\beta = \{C_{nm}, S_{nm}\} \quad (27)$$

$$n = 2, \dots, N; m = 0, \dots, n$$

定义状态向量为 $X = [r_2, \dot{r}_2, \beta]$, 顾及到引力场位系数不随时间变化,则卫星的状态方程为:

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= F(r_2, t), r(t_0) = v_0; \\ \dot{\beta} &= 0, \beta(t_0) = \beta_0 \end{aligned} \quad (28)$$

设 $y_i = H_i \Phi(t_i, t_0) x_0 + \epsilon_i, i = 1, \dots, l$ (29)

式中, l 为观测量的个数; $H_i = \left[\frac{\partial G}{\partial X} \right]_i^*$; $y_i = L_i - H(X_i^*, t_i)$; $x_0 = x(t_0) = X(t_0) - X^*(t_0)$; $\Phi(t_i, t_0)$ 为状态转移矩阵,且存在 $\Phi(t, t_i) = (\partial F / \partial X) \Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = I$ 。

利用卡尔曼滤波算法解形如式(26)、式(28)和式(29)的线性问题,就可求得状态向量的最优估值,即同时解算引力位系数和被跟踪卫星的轨道。

将卫星定轨和引力位系数估计结果代入式(26)中,还可以求得卫星轨道处的重力向量。

不难看出,如果将观测方程、运动方程和状态向量经过适当修改,动力法同样也适合 SST-II 模式,以及 SST-hl/SST-II 组合模式。

如果状态向量只取被跟踪卫星的状态,上述模型就变成动力法定轨模型。如果状态向量只取位系数,上述模型就变成卫星跟踪重力场恢

复模型。

4.2 重力卫星的精密定轨方法

为提高重力卫星的定轨精度,一般将动态定轨与动力定轨方法进行组合,其思路是,将非差观测(对应于接收机的伪距或载波观测)、双差观测或三差观测作为式(25)的观测量,将重力卫星的坐标和速度以及其他待估参数(如整周模糊度、地球自转参数或地心坐标等)作为状态向量,按照类似于 §4.1 的方法构造卡尔曼滤波模型,状态估计结果就给出重力卫星轨道状态向量的估计。定轨所需的非地球引力保守力用模型计算,非保守力由星载加速度计提供。

如果不考虑引力场位系数估计,可利用一定长度的重力卫星轨道弧段观测量进行动态/动力组法定轨,这是重力卫星运行初期采用的最佳定轨方法。如果将引力场位系数也作为状态进行估计,至少需要采用一个地面轨迹重复周期的数据,组合定轨的计算量非常大。因此,通常是先用动态法估计重力卫星轨道,到重力卫星运行到一定时段后,用其他方法估计引力场位系数的初值,再利用一定长度的重力卫星轨道弧段的基本观测量,按动态/动力组合法实现无引力场位系数估计的重力卫星定轨,如此反复几次,直到最近两次确定的卫星轨道之间的差别可以忽略为止。

不难看出,动态/动力组合法可充分融合各种跟踪观测(SST、SST-hl 和 SST-II),提高卫星的定轨精度。

4.3 基于距离二次变率的多种跟踪模式组合重力场恢复方法

由式(5)可以看出,卫星跟踪的距离二次变率约等于低轨卫星几何加速度与高轨卫星几何加速度之差在视线方向上的投影。通常假设高轨卫星几何加速度无误差,表现为数据处理算法不对高轨卫星的动力模型或轨道进行改正,而将高轨卫星星座或地面站当作无模型误差的地球参考框架看待。

对于 SST-hl 模式,如果采用式(12)或式(14)作为基本观测方程,并将高轨卫星的非保守力参数化(低频信号),那么,在恢复重力场的同时,可望改善高轨卫星的动力模型,从而提高高轨卫星定轨和卫星跟踪重力场恢复的精度。

对于 STT 模式,如果采用式(12)或式(14)作为基本观测方程,并将地面跟踪站某些未确定的动力模型参数作为未知参数,那么,在恢复重力场的同时,可望改善地面跟踪站的动力模型,并提高地面跟踪对重力场恢复的精度。

至此, 可将基于距离二次变率的多种跟踪模式组合卫星重力场恢复过程归纳为: 不论是 SST、SST-hl 还是 SST-ll 跟踪方式, 均采用距离二次变率作为基本观测量, 以式(12)为基本观测方程, 并对式(12)的右边适当增加未知动力模型参数, 在估计未知动力模型参数的同时, 恢复地球重力场。卫星定轨采用短弧动态/动力组合定轨方法, 距离二次变率由定轨后求得的滤波值即观测量的平差值和定轨结果计算, 见式(25)。

采用距离二次变率作为基本观测量, 可以进一步消除定轨后的低轨卫星轨道相关性误差对重力场恢复的影响。从这个意义上讲, 利用距离二次变率为基本观测量比直接由低轨卫星轨道恢复重力场对卫星定轨的精度要求要低一些。

参 考 文 献

- 1 陈俊勇. 现代低轨卫星对地球重力场探测的实践和进展. 测绘科学, 2002(1)
- 2 许厚泽, 陆仲连. 中国地球重力场与大地水准面. 北京: 解放军出版社, 1997
- 3 宁津生, 罗志才. 卫星跟踪卫星技术的进展及应用前景. 地球科学进展, 2002(1)
- 4 张传定. 卫星重力测量——基础、模型化方法与数据

- 处理算法: [博士学位]. 郑州: 郑州信息工程大学, 2000
- 5 Biancale R. A New Global Earth's Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations; GRIM5-S1. Geophysical Research Letters, 2000, 27: 3 611 ~ 3 615
 - 6 Pnam I, Jssel J. GPS-based Precise Orbit Determination of the Very Low Earth-orbiting Gravity Mission GOCE. J. Geod., 2001, 74: 590 ~ 602
 - 7 Perosanz F, Marty J C, Balmino G. Dynamic Orbit Determination and Gravity Field Model Improvement from GPS DORIS and Laser Measurements on Topex/Poseidon Satellite. J. Geod., 1997, 71: 160 ~ 170
 - 8 Kaula W M. Inference of Variations in the Gravity Field from Satellite-to-Satellite Range Rate. J. Geophys. Res., 1983, 88(B10): 8 345 ~ 8 349
 - 9 Reigber C H. A High Quality Global Gravity Field Model from CHAMP GPS Tracking Data and Accelerometry (EIGEN-1S). Geophys. Res. Lett., 2002, 29(14)
 - 10 Sneeuw N. A Semi-analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observations. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 527, 2000

第一作者简介: 章传银, 副研究员, 博士。现主要从事地球重力场与理论大地测量研究工作。

Gravity Field Recovery Method with Several Kinds of Satellite Tracking Data

ZHANG Chuanyin¹ HU Jianguo¹ DANG Yamin¹ CHANG Xiaotao¹

(1 Chinese Academy of Surveying and Mapping 16 Baitaping Road, Beijing, China, 100039)

Abstract: Two basic observation equations for gravity field recovery are presented. The existing algorithms are classified on the angles of expression mode of transfer coefficients matrix from gravity field parameters to basic observations. A data processing method about kinematic/dynamic orbit determination and gravity field recovery is introduced.

Key words: basic observation; transfer coefficients matrix; range-rate change; kinematic/dynamic orbit determination; gravity field recovery

About the first author: ZHANG Chuanyin Ph. D. He is engaged in the research on in gravity field and mathematical geodesy.