DOI:10.13203/j.whugis2003.s1.029
第28卷特刊　　武汉大学学报·信息科学版　　Vol.28 Special Issue
2003年5月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　May 2003

文章编号:1671-8860(2003)Z3-0115-04　　文献标识码:A

# GPS 非线性数据处理的同伦最小二乘模型

陶本藻[1]　张　勤[2]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路129号,430079)
(2　长安大学地质工程与测绘工程学院,西安市雁塔路6号,710054)

摘　要:基于非线性同伦思想,提出了非线性最小二乘同伦方法,并推导出相应的GPS同伦非线性模型和算法。算例表明,对于精度较差的初始值,采用同伦非线性GPS伪距定位模型较线性最小二乘求解精度要好。

关键词:GPS非线性数据处理;同伦算法;同伦最小二乘模型
中图法分类号:P207.2;P228.41

在GPS定位数据处理中,存在大量的非线性模型,GPS定位观测方程是一个典型的非线性方程。另外,GPS成果是WGS-84地心坐标下的三维坐标,而实际应用中的成果常采用国家参心坐标系或地方独立坐标系下的坐标,因此,需要利用坐标转换参数将GPS成果转换到国家坐标系(地方坐标系),而采用的坐标转换模型通常是非线性的。GPS约束平差或GPS联合平差中的约束条件和部分观测方程也是非线性的,对于这些非线性方程的求解问题,基本均采用经典的数据处理方法,即将方程按泰勒级数展开至一次项,并忽略二次及其以上的各项,来实现方程的线性化,即用线性最小二乘近似取代非线性最小二乘。这就要求首先参数的近似值必须与其真值较为接近,其次要求模型的非线性程度较弱,只有满足这样两个条件的线性近似才能取得较优的结果。然而在GPS定位中,这种条件往往难以满足,因此,线性化的GPS非线性函数模型必然会影响到其真实性。因而必须研究GPS数据处理的非线性模型问题及相应的处理方法,以期获得更符合实际情况、高精度的定位结果。

## 1　同伦算法

### 1.1　同伦算法的基本思想

连续同伦算法是Chow, Mallet-Paret和Yorke(1978)提出的,其基本思想为:

对于非线性方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

式中,$x\in \boldsymbol{R}^n$;$f$为该空间的光滑映射。

构造$f$与另一个光滑映射$g$的一个线性同伦函数

$$H(t,x)=\tan(x)+(1-t)f(x)\in Y \tag{2}$$

式中,$t\in[0,1]$,$[0,1]\times X\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$,而光滑映射$H$将$(n+1)$维空间的参数$[n+1]\times X$影射为$n$维空间的$Y$。

$$\begin{cases}\text{当 } t=1 \text{ 时}, H(1,x)=g(x)\\ \text{当 } t=0 \text{ 时}, H(0,x)=f(x)\end{cases}\quad \forall x\in X$$

式中,$g(x)=0$的零点已知,如可取$g(x)=x-a$,$a$为$\boldsymbol{R}^n$中的常向量,因而$g$有惟一的零点$x^0=a$,而方程$H(0,x)=0$就是式(1)的解。因此,求式(1)变为求同伦方程$H(t,x)=0$的解。

式(2)中,对于$y=0$,由于$\frac{\partial H}{\partial(t,x)}\neq 0$,则称0是$H$的正则值,那么由微分拓扑学中的逆像定理知,函数逆像$H^{-1}(y)$是一位光滑流形,即为简单光滑曲线,称该曲线为同伦曲线。

因此,只要从$(1,a)$发出的同伦曲线有界,连续跟踪该曲线至另一端点$t=0$时,相应的$x$即为式(1)的解。

### 1.2　同伦算法

同伦方程的求解主要是对同伦曲线的连续跟踪,故取满足同伦方程的弧长$s$及曲线$\lambda(s)$:

$$H(\lambda(s))=H(t(s),x(s))=0 \tag{3}$$

将方程(3)两边同时对$s$求导,得:

$$\frac{\partial H}{\partial s}=\frac{\partial H}{\partial(t(s),x(s))}=0$$

收稿日期:2003-03-25。
项目来源:测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目((00)0204)。

$$\frac{\partial H}{\partial s}(\lambda(s))\dot{t}(s)+\frac{\partial H}{\partial x}(\lambda(s))\dot{x}(s)=0 \quad (4)$$

对式(2)求导后得:

$$[-f(x(s))+x(s)-a]\dot{t}(s)+[t(s)I+(1-t(s))\frac{\partial f}{\partial x}(x(s))]\dot{x}(s)=0 \quad (5)$$

由于 $\frac{\partial H}{\partial(t,x)}\neq 0$，那么矩阵 $\begin{bmatrix}-f(x(s))+x(s)-a \\ t(s)I+(1-t(s))\frac{\partial f}{\partial x}(x(s))\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 满秩，因此，式(5)在区域内具有惟一解。

因而可采用解微分方程初值问题的数值解法，求解初值问题的微分方程:

$$\begin{cases}[-f(x(s))+x(s)-a]\dot{t}(s)+[t(s)I+ \\ \quad (1-t(s))\frac{\partial f}{\partial x}(x(s))]\dot{x}(s)=0 \\ (t(0),x(0))=(1,a)\end{cases} \quad (6)$$

实现对同伦方程(3)的求解。

因此，如果曲线 $\lambda(s)$ 有界，则可用微分方程初值问题从 $(1,a)$ 开始跟踪曲线直至超平面。在跟踪过程中，为了避免连续跟踪造成数值解的误差积累，导致从曲线 $\lambda(s)$ 滑向另外一条曲线，产生错误解，可采用解微分方程初值的预估-校正法。例如，可采用四阶 Runge-Kutta 方法来取数值解的近似解 $y'_k$，再用 Nowton 迭代法，校正到其精确解 $y_k$，从而使计算 $y_0, y_1, \cdots, y_k$ 造成的误差不会影响 $y_{k+1}$ 的精度，保证了解的稳定性。

## 2 GPS 非线性同伦最小二乘模型

GPS 定位的伪距与待定位点坐标之间是一种非线性关系:

$$D_i^j=[(X^j(t)-X_i)^2+(Y^j(t)-Y_i)^2+(Z^j(t)-Z_i)^2]^{1/2}+C(\delta t_i-\delta t^j) \quad (7)$$

伪距观测方程(7)含有待定位的坐标 $(X_i, Y_i, Z_i)$ 和钟误差等4个未知参数，因此，需同时观测4颗及其以上的卫星，即 $j\geqslant 4$（$j$ 为所观测的卫星数），获得 $j$ 个伪距观测方程才能实现定位。

在通常的 GPS 伪距定位数据处理中，利用待定位点坐标的近似值，代入伪距观测方程，按泰勒级数展开至一次项，得观测方程线性化近似误差方程:

$$V_i^j(t)=-\frac{(\Delta X_i^j)_0}{(D_i^j(t))_0}\delta X_i-\frac{(\Delta Y_i^j)_0}{(D_i^j(t))_0}\delta Y_i-\frac{(\Delta Z_i^j)_0}{(D_i^j(t))_0}\delta Z_i+C(\delta t_i-\delta t^j)+L_i^j(t),$$

$$j=1,2,3,\cdots \quad (8)$$

当观测卫星数 $j\geqslant 4$ 时，根据线性最小二乘原理 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\min$ 求得定位坐标的解。

采用这种近似的线性最小二乘定位求解法，一方面由于待定点位的近似坐标精度很差，从而导致定位精度下降，所求的定位坐标值不够准确；另一方面，该数据处理方法无法反映定位模型所具有的非线性的内在本质和特性。本文研究将同伦非线性方法引入到 GPS 伪距定位数据处理中，应用非线性最小二乘原理来求解待定点的坐标平差值。

将式(7)写成非线性误差方程有:

$$V_i^j(t)=[(X^j(t)-X_i)^2+(Y^j(t)-Y_i)^2+(Z^j(t)-Z_i)^2]^{1/2}+C(\delta t_i-\delta t^j)-D_i^j(t)$$

$$j=1,2,3,\cdots \quad (9)$$

令 $\boldsymbol{V}_i(t)=[V_i^1(t), V_i^2(t), V_i^3(t), \cdots]^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{X}_i=[X_i, Y_i, Z_i]$$

$$f^j(\boldsymbol{X}_i)=[(X^j(t)-X_i)^2+(Y^j(t)-Y_i)^2+(Z^j(t)-Z_i)^2]^{1/2}+C(\delta t_i-\delta t^j)$$

$$f(\boldsymbol{X}_i)=[f^1(\boldsymbol{X}_i), f^2(\boldsymbol{X}_i), f^3(\boldsymbol{X}_i), \cdots]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{D}_i=[D_i^1, D_i^2, D_i^3, \cdots]$$

对 $t$ 时刻所观测的 $j$ 颗卫星，有:

$$\boldsymbol{V}_i(t)=f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i \quad (10)$$

按照非线性最小二乘原理:

$$\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i(t)=(f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i)^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i)=\min$$

求一阶导数，并令其等于零，有:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i(t))}{\partial \boldsymbol{X}_i}=2(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i)=0 \quad (11)$$

即有非线性方程:

$$(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i)=0 \quad (12)$$

由同伦非线性方法，对其构成同伦函数。令

$$F(\boldsymbol{X}_i)=(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{D}_i)=0 \quad (13)$$

$$H(t,\boldsymbol{X}_i)=t(\boldsymbol{X}_i-a)+(1-t)F(\boldsymbol{X}_i) \quad (14)$$

为对该同伦函数跟踪求解，采用求解偏微分方程组初值法，因此，需对其求一阶偏导数构成偏微分方程:

$$\frac{\partial H(t,\boldsymbol{X}_i)}{\partial(t,\boldsymbol{X}_i)}=0$$

$$\left[\boldsymbol{X}_i - a - F(\boldsymbol{X}_i)\right]\frac{\partial t}{\partial s} +$$

$$\left[tI + (1-t)\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}}\right]\frac{\partial X}{\partial s} = 0 \qquad (15)$$

将式(13)代入式(15),则有:

$$\left[\boldsymbol{X}_i - a - \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i}\right)^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i) - \boldsymbol{D}_i)\right]\frac{\partial t}{\partial s} +$$
$$\left[tI + (1-t)\left(\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}\right)^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{X}_i) - \boldsymbol{D}_i)\right)\right]\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial s} = 0 \quad (16)$$

令 $\boldsymbol{A}_i = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i}$, $\boldsymbol{G}_i = \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_i)}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}$,

$$\boldsymbol{L}_i = f(\boldsymbol{X}_i) - \boldsymbol{D}_i$$

式(16)可写为:

$$\left[\boldsymbol{X}_i - a - \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i\right]\frac{\partial t}{\partial s} + [tI + (1-t)\cdot$$
$$(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i)]\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \boldsymbol{X}} = 0 \qquad (17)$$

## 3　非线性同伦最小二乘平差算例

根据解微分方程初值的预估-校正法,采用式(6)的微分方程初值对同伦非线性最小二乘模型(17)求解,从 $t=1, X=a$ 的端点开始,跟踪曲线 $\lambda(s)$,直至其收敛到 $t=0, F(X^*)=0$ 时曲线的另一端点,从而获得满足非线性最小二乘的非线性方程解、待定点位的坐标平差值,同时根据 $\sigma_0^2 = \pm\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}}{m-4}}$求出单位权中误差。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial(t, x)} = \left[\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i\right]\dfrac{\partial t}{\partial s} + [tI + \\ \quad (1-t)(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i)]\dfrac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial \boldsymbol{X}} = 0 \\ (t(0), X(0)) = (1, a) \end{cases} \qquad (18)$$

为了进一步研究 GPS 非线性同伦最小二乘方法的可行性、求解特点,以及实际应用的有效性,对某 GPS 观测非线性方程用同伦最小二乘进行实际求解。

实例　GPS 时刻 $t$,在地面 $P$ 点同时观测 8 颗卫星,各卫星在该时刻的星历坐标及其至地面 $P$ 点的伪距观测均列于表 1。表 2 为利用距该时刻 5min 之后的另一组观测数据求得的 $P$ 点的另一组坐标值与相应的精度。

由计算结果对比可以看出,由于在定位模型中没有考虑电离层、对流层和卫星星历偏差的改正参数,因而所求的结果与实际坐标存在明显的系统偏差,在 $X$ 坐标上相差达 30 多 m。尽管存在系统误差,但是采用同伦非线性最小二乘较近似线性最小二乘求解,其精度有较明显的改善。

表 1　GPS 伪距观测值的定位值(1)

Tab.1　Positioning Value by GPS Pseudo-range Observation(1)

| 卫星号 | 伪距/m | 卫星坐标 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $X$/m | $Y$/m | $Z$/m |
| 3 | 20 557 914.697 | −12 647 356.002 | 2 320 891.826 | 2 119 653.752 |
| 13 | 24 153 634.807 | 11 304 741.359 | 10 538 349.009 | 21 625 701.577 |
| 19 | 24 710 789.398 | 15 788 657.769 | 11 652 778.090 | 18 134 569.384 |
| 20 | 23 876 157.894 | 13 086 596.030 | 23 006 463.946 | −1 861 379.281 |
| 22 | 20 798 532.362 | −8 704 397.326 | 13 911 425.858 | 20 511 429.993 |
| 25 | 22 016 161.749 | −22 673 098.379 | 9 676 443.495 | 9 899 119.149 |
| 28 | 21 245 751 596 | 1 683 778.276 | 22 085 682.088 | 14 905 015.414 |
| 31 | 22 894 552.930 | −2 908 158.473 | 23 959 863.832 | −10 960 196.90 |
| 实际坐标值 | $\sigma_0$/m | −2 411 013.636 | 5 380 269.718 | 2 425 129.7020 |
| 同伦非线性解 | 6.92 | −2 411 047.829 | 5 380 270.318 | 2 425 129.479 |
| 线性最小二乘解 | 8.37 | −2 411 050.405 | 5 380 267.513 | 2 425 132.638 |

表 2 GPS 伪距观测值的定位值(2)

Tab.2 Positioning Value by GPS Pseudo-range Observation(2)

| 卫星号 | 伪距/m | 卫星坐标 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | X/m | Y/m | Z/m |
| 3 | 20 483 087.808 | −12 698 535.287 | 23 087 532.038 | 5 958 194.834 |
| 13 | 23 990 563.663 | 10 960 364.595 | 11 190 206.288 | 21 477 430.989 |
| 19 | 24 577 533.492 | −15 177 933.779 | 11 785 357.531 | 8 560 749.538 |
| 20 | 23 959 067.844 | 12 979 982.665 | 22 984 063.839 | −2 714 818.375 |
| 22 | 20 881 528.179 | −9 162 011.387 | 13 342 390.877 | 20 701 251.641 |
| 25 | 22 065 301.484 | −23 000 341.139 | 9 265 074.675 | 9 140 560.295 |
| 28 | 21 240 905.639 | 1 360 564.548 | 21 682 776.433 | 15 517 078.672 |
| 31 | 22 711 585.601 | −3 135 756.658 | 2 424 679.693 | −10 215 911.864 |
| 实际坐标值 | $\sigma_0$/m | −2 411 013.636 | 5 380 269.718 | 2 425 129.720 |
| 同伦非线性解 | 6.69 | −2 411 049.121 | 5 386 270.172 | 2 425 128.093 |
| 线性最小二乘解 | 9.71 | −2 411 049.570 | 5 380 267.206 | 2 425 133.000 |

## 参 考 文 献


1 李庆扬, 莫孜中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法. 北京: 科学出版社, 1999

2 韦博成. 近代非线性回归分析. 南京: 东南大学出版社, 1989

3 黄象鼎. 非线性数值分析. 武汉: 武汉大学出版社, 2000

4 王则柯, 高堂安. 同伦方法引论. 重庆: 重庆出版社, 1990

5 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 2001

6 Athanasios D, Fernando S. Nonlinear Estimation Problems for Nonlinear Models. Manuscripa Geodatica, 1995(20): 110~122

7 Blaha G. Non-iterative Approach to Nonlinear Least-squares Adjustment. Manuscripa Geodation, 1994(19): 199~212

8 Teunissen P J G, Knickneger F H. Non-linearity and Least-squares. CISM Journal ACSGG, 1988, 42(4): 383~390

9 Teunissen P J G. First and Second Meats of Non-linear Least-squares Estimation. Bull. Geod., 1989(13): 253~262


第一作者简介: 陶本藻, 教授, 博士生导师。现主要从事现代测量数据处理和地壳形变地球动力学解释的研究。

# Homotopy Least Squares Model of GPS Nonlinear Data Processing

*TAO Benzao*[1] *ZHANG Qin*[2]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 Institute of Geology-Engineering and Geomatics, Chang' an University, 6 Yanta Road, Xi' an, China, 710054)

**Abstract**: This paper puts forward the LS adjustment based on the homotopy arithmetic, deduces and constructes homotopy nonlinear LS model and its algorithms with nonlinear LS method. This method is an effective numerical method to solve the nonlinear equation.

**Key words**: GPS nonlinear data processing; homotopy arithmetic; homotopy LS model

**About the first author**: TAO Benzao, professor, Ph. D supervisor. His interested fields are theoretic research on data processing and geophysics interpretation of crustal deformation.