

GPS 高程异常拟合的降维处理算法

张兴福¹ 沈云中¹

(1 同济大学测量与国土信息工程系, 上海市四平路 1239 号 200092)

摘要:探讨了基于拟合误差方程病态的降维处理算法,以期得到稳定的解。该方法的本质是截尾正则化算法,并利用实测数据进行了验证。结果表明,本方法非常有效。

关键词:高程异常拟合;病态方程;降维处理算法

中图法分类号:P223.7;P228.41

利用水准高程和 GPS 高程拟合正常高以取代低等级的水准测量的技术已经得到广泛的应用^[1~3]。其原理主要是根据已知点的水准高和大地高求得高程异常,由于局部区域的高程异常变化比较平缓,可采用一定的数学模型(一些初等函数如平面、曲面、直线等)来逼近局部的(似)大地水准面,进而求得未知点的正常高。但是在实际应用中,由于联测水准的 GPS 点分布不合理,往往会引起拟合误差方程的病态,进而影响解的稳定性。

基于观测方程的病态处理算法有很多^[4]。本文的处理方法本质上是截尾正则化算法,将对应于误差方程系数矩阵特征值较小的 k 个待估参数剔除,使待估参数向量由 t 维降至 $t-k$ 维,并导出了相应的计算公式。最后利用某 GPS 控制网的实测数据进行了验证。

1 GPS 高程异常拟合的数学模型

如果全网共布设 n 个 GPS 控制点,所选拟合模型的参数为 α_i , 个数为 t , 拟合基函数为 $\Phi_i(x_i, y_i)$, 并且联测了 m 个 GPS 水准点 ($m \geq t$), 则高程异常拟合的误差方程式为:

$$V = AX - L \quad (1)$$

式中, $A = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, y_1) & \cdots & \Phi_t(x_1, y_1) \\ \cdots & & \cdots \\ \Phi_1(x_m, y_m) & \cdots & \Phi_t(x_m, y_m) \end{bmatrix}$, $X = [\alpha_1, \cdots, \alpha_t]^T$, $L = [\zeta_1, \cdots, \zeta_m]^T$, ζ_i 为已知点的高

程异常值, 权阵为 P 。利用最小二乘法可解得参数的估值 X :

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (2)$$

则待求点的高程异常值为:

$$\zeta = B X \quad (3)$$

式中, B 为待求点的系数矩阵。常用的拟合模型有直线拟合、二次曲线拟合、平面拟合、曲面拟合、Hardy 函数、样条函数等。

2 基于观测方程病态的降维处理的数学模型

对式(1)中的系数矩阵 A 作 SVD (singular value decomposition) 分解:

$$A = U W S^T \quad (4)$$

式中, $U \in R^{m \times t}$ 且 $U^T U = I^{t \times t}$; $W \in R^{t \times t}$, 是对角阵, $\text{diag}(W) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_t$, 并且 λ_i 为系数矩阵 A 的特征值; $S \in R^{t \times t}$ 且 $S^T S = S S^T = I^{t \times t}$; R 表示矩阵空间。

将式(4)代入式(1)得:

$$V = U W S^T X - L \quad (5)$$

令 $A_i = U W$, $X_i = S^T X$, 则式(5)变为:

$$V = A_i X_i - L \quad (6)$$

根据最小二乘原理可得拟合参数 X_i 的估值为:

$$X_i = (A_i^T P A_i)^{-1} A_i^T P L \quad (7)$$

若取权阵 P 为单位权, 又由于 $A_i = U W$ 且 $U^T U = I^{t \times t}$, 则式(7)可简化为:

$$X_i = (W W)^{-1} A_i^T L \quad (8)$$

式中, $X_t \in R^{1 \times t}$, $W \in R^{t \times t}$ 。

求得拟合参数估值后, 为了求得待求点的高程异常, 还需要将待求点的系数矩阵 B 进行变换。由于式(6)中 $X_t = S^T X$, 所以 $X = SX_t$, 则式(3)可化为:

$$\zeta = BSX_t \tag{9}$$

设经过变换后的待求点的系数矩阵为 B_t , 令

$$B_t = BS \tag{10}$$

则待求点的高程异常值为:

$$\zeta = B_t X_t \tag{11}$$

从上面的推导可看出, 式(3)和式(11)是等价的。

当由式(11)计算所得的高程异常的拟合残差过大时, 说明所选择的拟合模型并不适合此拟合区域。为了提高高程异常拟合的稳定性和效果, 可采用本文提出的降维处理方法, 即将对应于误差方程系数矩阵特征值较小的 $t-k$ 个参数剔除(如果参数向量从 t 维降至 k 维)。其过程如下。

将误差方程系数矩阵 A 所对应的较小的 $t-k$ 个特征值去掉, 即将由式(4)分解所得到的对角阵 W 降至 k 维, 相应地也要将矩阵 A_t 的列维数降至 k 维, 而行维数保持不变。设变换后的矩

阵为 A_k 。若 $A_t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mt} \end{pmatrix}$, 则 $A_k =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$$
, 则式(7)将变为:

$$X_k = (A_k^T P A_k)^{-1} A_k^T P L \tag{12}$$

式中, X_k 为降至 k 维后的拟合参数估值。则待求点的高程异常值为:

$$\zeta = B_t X \quad \text{或} \quad \zeta = B_k X_k \tag{13}$$

式中, $X = (X_k, 0)$, X_k 为式(12)的计算结果, 0 为 $t-k$ 维的零向量, B_t 可由式(10)求得, B_k 为将矩阵 B_t 的后 $t-k$ 列剔除后的矩阵。式(12)和式(13)即是降维处理的计算公式。

3 算例与计算结果分析

本数据为某 GPS 控制网的实测数据, 该网全长约 30km, 共布设 20 个 GPS 控制点, 每个控制点均进行了 GPS 测量和水准测量。点号沿线路方向从 1~20, 并且采用 3 种方案进行拟合。

方案 1 采用曲面拟合模型未加重力场模型, 拟合采用的 GPS 水准点为 2、9、11、12、18、20。

由式(4)分解所得的误差方程系数 A 的特征值为 7.580 5, 2.687 9, 1.551 2, 0.578 3, 0.377 6, 0.003 5, 拟合高程异常残差如图 1 所示。

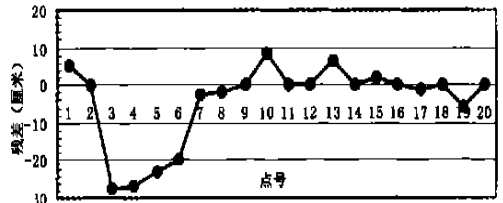


图 1 曲面拟合高程异常残差图
Fig. 1 Interpolation Remnant of Height Anomaly with Quadric

由图 1 可见, 采用未经降维处理的曲面拟合模型时, 由于采用的 GPS 水准点的分布不合理, 造成了 2~7 号点之间的高程异常拟合残差过大, 10、13 号点的残差也将近 10cm, 1、19 号点的残差为 5cm 左右, 说明此区域不适合用曲面拟合模型。这也可从误差方程系数的最小特征值为 0.003 5 得到答案。

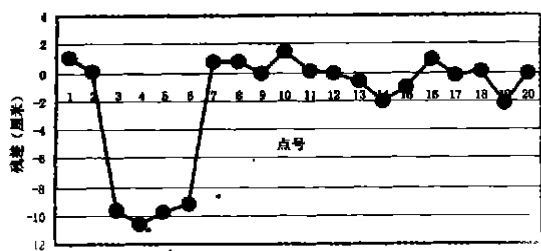
方案 2 在方案 1 的基础上, 采用降维处理的数学模型, 将拟合维数降至 5 维, 即将特征值 0.003 5 去掉, 拟合高程异常残差图见图 2(a)。

由图 2(a)可见, 当拟合模型的维数由 6 维降至 5 维时, 即将拟合误差方程系数中最小的特征值去掉, 2 到 7 号点之间的拟合残差迅速降低, 由 20 多 cm 降至 10cm 左右, 1、19、10、13 号点的残差也降至 2cm 以内, 其他点的残差变化不大, 这说明通过对拟合模型进行降维处理可提高拟合的效果, 得到相对稳定的拟合结果。

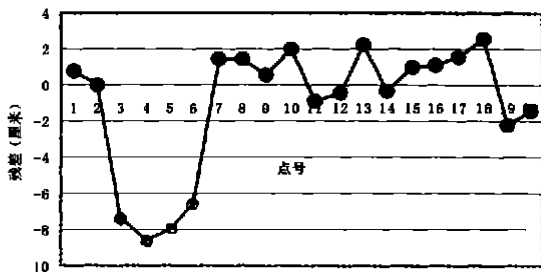
方案 3 在方案 2 的基础上, 采用降维处理的数学模型, 将拟合维数降至 4 维, 也即是将 0.377 6 的特征值去掉, 拟合高程异常残差如图 2(b)所示。

由图 2(b)可见, 当拟合模型的维数由 5 维降至 4 维时, 2~7 号点之间的拟合残差平均降低 2cm 左右, 但 17、18、20 号点的残差也相应地变大了。这说明将 0.377 6 的特征值去掉并不是很合理。

综合方案 1、2、3 可见, 采用降维处理的方法能有效地改善高程异常的拟合结果, 特别是当拟合误差方程不稳定时, 效果非常明显。所以, 要根据检核点的高程异常的残差大小, 对拟合模型进行降维处理, 但检核点需足够多并均匀分布在测区内。



(a) 经 5 维降维处理



(b) 经 4 维降维处理

图 2 拟合高程异常残差图

Fig. 2 Interpolation Remnant of Height

参 考 文 献

- 1 沈云中. GPS 铁路航测外控点的高程计算模型. 同济大学学报, 1996(4): 450 ~ 455
- 2 沈云中. 削弱不可建模系统误差影响的高程异常拟合方法. 工程勘察, 1998(2): 44 ~ 46
- 3 吉渊明. 曲面拟合法求 GPS 网正常高的几点认识. 测

- 4 沈云中, 许厚泽. 不适定方程正则化算法的谱分解式. 大地测量与地球动力学, 2002(3): 10 ~ 14

第一作者简介: 张兴福, 硕士生. 主要研究方向为物理大地测量、GPS 应用.

E-mail: xfzhang77@163.com

A Reducing Dimension Algorithm of GPS Height Anomaly Interpolation

ZHANG Xingfu¹ SHEN Yunzhong¹

(1 Department of Surveying and Geoinformatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai, China 200092)

Abstract: The unreasonable distribution of GPS leveling height points may cause the estimated parameters unstable, which will accordingly affect the accuracy of the interpolated height anomaly. In order to obtain relatively stable result, this paper probes into a reducing dimension algorithm on ill-posed error equation. Essentially this method is a tailored-regularization algorithm.

Key words: height anomaly interpolation; ill-posed equation; reducing dimension algorithm

About the first author: ZHANG Xingfu, postgraduate. His majors in physical geodesy and GPS application. E-mail: xfzhang77@163.com