

GPS 单历元定向和测姿算法及其精度分析

刘根友¹ 欧吉坤¹

(1 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉市徐东路 174 号, 430077)

摘要: 在 GPS 单历元阻尼 LAMBDA 算法的基础上, 结合固定边长条件, 给出了一种 GPS 定向定姿的新方法, 同时给出了 GPS 单历元定向和定姿精度估算公式。

关键词: 姿态定位; GPS; 单历元; LAMBDA

中图法分类号: P228.42

常规单历元解法单历元定位要求较高精度的近似坐标和双差观测值, 在近似值精度范围内, 给出备选模糊度的搜索范围, 按残差平方和最小确定模糊度^[1]。这种方法在先验坐标精度较差时, 搜索范围太大, 解算时间长, 不适合动态定位, 也不易于程序编制。1995 年, Tenissen 针对快速静态定位提出了一种非常有效的模糊度搜索方法——LAMBDA 方法^[2]。但是, 单历元载波相位定位的法方程是秩亏的, 单纯的 LAMBDA 方法无能为力。为此, 笔者在法方程中添加阻尼因子(矩阵), 提出了适合动态定位的单历元阻尼 LAMBDA 方法, 并且取得了较好的应用效果^[3]。

1 航向和姿态计算方法

在载体上布设 $\triangle ABC$, 在 3 个顶点上安置 3 台 GPS 接收机或者多天接收机, 由此三角形确定的面为载体姿态的参考面, 参考面的法线 n 的方向变化即为载体姿态变化, 如图 1。由 GPS 定位可以获得三点空间直角坐标 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 、 $C(x_3, y_3, z_3)$, 不难计算出法线 n 的方向余弦。

在大多数情况下, 测姿和定向用载体的航向、横滚角和纵滚角(俯仰角)表示^[4,5], 此时的参考坐标系应为站坐标系 $A-x_p y_p h_p$ 。为此, 选择 A 点为参考点, 方向 AB 为参考方向, 则有如下关系:

航向角 Ψ (azimuth): 面 $h_p AB$ 与面 $h_p A x_p$ 的夹角;

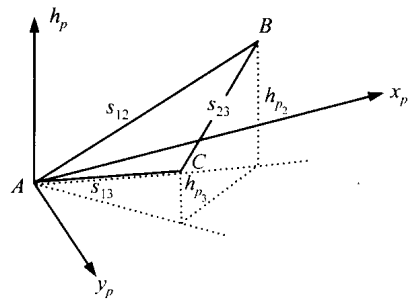


图 1 站坐标系中的姿态表示

Fig. 1 Attitude in Local Geodetic Coordinate System

纵滚角 β (pitch): 线 AB 与面 $x_p A y_p$ 的夹角, 即线 AB 与 $A h_p$ 夹角的余角;

横滚角 α (roll): 面 $A h_p B$ 与 $\triangle ABC$ 的夹角的余角。

为了方便计算上述 3 个量, 应将空间直角坐标转换为以 A 点为原点的站心坐标。设 B 和 C 的站坐标为 (x_{p2}, y_{p2}, h_{p2}) 、 (x_{p3}, y_{p3}, h_{p3}) , 有:

航向角:

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{x_{p2}}{y_{p2}} \right) \quad (1)$$

纵滚角:

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{h_{p2}}{s_{12}} \right) \quad (2)$$

横滚角:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left[\frac{1}{s_{12}s_{13}} (y_{p2}^2 h_{p3} - y_{p2} y_{p3} h_{p2} - x_{p2} x_{p3} h_{p2} + x_{p2}^2 h_{p3}) \right] \quad (3)$$

2 姿态定位的单历元阻尼 LAMBDA 算法

2.1 GPS 单历元阻尼 LAMBDA 算法

设 A 点为 GPS 差分参考站, A 点坐标偏差对上述 3 个姿态角的误差影响很小, 由伪距单点定位获得的点位已足够。GPS 单历元处理时, 由 $A、B、C$ 3 点组成的独立双差观测方程有:

$$\begin{cases} A_{12} \delta X_2 + B_{12} Y_{12} = L_{12}, P_{12} \\ A_{13} \delta X_3 + B_{13} Y_{13} = L_{13}, P_{13} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\delta X_2、\delta X_3$ 为 $B、C$ 点的近似坐标 $X_{20}、X_{30}$ (伪距差分获得) 的改正数; $Y_{12}、Y_{13}$ 为基线 AB 和 AC 对应的双差模糊度; $A_{12}、A_{13}$ 为坐标未知数的系数阵; $B_{12}、B_{13}$ 为模糊度未知数的系数阵; $L_{12}、L_{13}$ 为双差观测值减去由近似坐标计算的理论值; P_{12} 和 P_{13} 为双差观测值的权阵。此外, 姿态定位时, 坐标还应满足下列条件方程:

$$\begin{cases} \|X_2 - X_1\| = s_1 \\ \|X_3 - X_1\| = s_2 \\ \|X_3 - X_2\| = s_3 \end{cases} \quad (5)$$

上述模型可以简写为:

$$\begin{cases} AX + BY = L \\ CX = W \end{cases} \quad (6)$$

按附有条件的间接平差, 得如下形式的法方程:

$$\begin{pmatrix} A^T P A & C^T & A^T P B \\ C & 0 & 0 \\ B^T P A & 0 & B^T P B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ K \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P L \\ W \\ B^T P L \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中, K 为待定系数。因为未知数的个数大于方程的个数, 法方程是秩亏的, 可按附有条件的阻尼 LAMBDA 方法^[3] 进行搜索, 固定模糊度 Y 后可以按下式计算基线的坐标:

$$\begin{aligned} X &= N_{aa}^{-1} (U_a - N_{ab} Y) - \\ &N_{aa}^{-1} C^T (C N_{aa}^{-1} C^T)^{-1} C N_{aa}^{-1} (U_a - N_{ab} Y) + \\ &N_{aa}^{-1} C^T (C N_{aa}^{-1} C^T)^{-1} W \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $N_{aa} = A^T P A$, $N_{bb} = B^T P B$, $U_a = A^T P L$, $U_b = B^T P L$, $N_{ab} = N_{ba}^T = A^T P B$, 其中第二、三项是由于坐标函数约束对未知数 X 的贡献。按此方法解算出 $B、C$ 两点的坐标后, 连同已知点 A 的坐标, 就可以计算出载体的方向和姿态。

2.2 观测值随机误差模型精化

单历元定位的特征仅利用当前观测历元的 GPS 观测数据, 其前提是要有高精度的载波相位观测值。该方法不受观测过程中周跳的影响, 具有一定的抵抗粗差的能力, 当粗差正好在整周

附近时对定位精度没有影响, 而对于 0.5 周左右的偶然误差, 反映较为强烈。如果该历元所有观测卫星的相位观测值都存在较大的偶然误差时, 有时甚至可能导致单历元模糊度搜索失败。上述模型是将所有非差观测值作为同等精度考虑的, 一般也能保证正确的模糊度搜索, 为了提高单历元定位的精度, 可以进一步考虑不同卫星的相位观测值权重。由于姿态定位的基线非常近, 差分后的主要偶然误差是路径延迟残余误差的影响, 一般而言, 低高度角的信号误差比较高的高度角信号误差要大。在 GPS 单历元定位中, 一方面要求观测卫星数越多越好^[3], 另一方面又不能容许太大的偶然误差存在。通过精化观测值的随机模型可以促进定位精度的提高。在姿态测定时卫星高度截止角一般选为 10° , 以保证有较多的观测卫星。不同高度角的卫星相位观测值可用下面经验公式确定中误差:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \alpha \cos^2 E) \quad (9)$$

式中, σ_0 为卫星在天顶时的信号观测中误差, 静态情况下一般取为 2mm, 动态情况下一般取为 3mm; E 为高度角; α 为系数, 一般取 $\alpha = 1.5$ 。根据协方差传播律, 可计算出新的双差观测权阵 P 。

3 GPS 单历元定向和定姿精度估计

GPS 单历元定向和定姿精度主要取决于坐标计算精度, 即单位权方差 σ 和坐标的协因数矩阵 Q_X 。由于单历元定位观测方程个数与模糊度未知数个数相等, 还包括坐标未知数, 因此观测方程是秩亏方程, 秩亏数等于坐标未知数个数, 按常规方法不可能计算单位权方差。但是, 由于模糊度的整数特性, 一旦根据某种判别方法确定模糊度以后, 就可以不考虑模糊度的精度问题, 这样就有多余观测存在, 可计算出单位权方差 σ^2 。坐标未知数的协因数矩阵可以用模糊度整数估计以后的值表示^[2]:

$$Q_X = Q_X - Q_{XY} Q_Y^{-1} Q_{YX} \quad (10)$$

上式右端的第一项是浮动解的协因数阵。

对式(1)、式(2)、式(3)微分有:

$$d\Psi = -\frac{y_{p_2}}{D_{12}} dx_{p_2} + \frac{x_{p_2}}{D_{12}} dy_{p_2} \quad (11)$$

$$d\beta = -\frac{x_{p_2} h_{p_2}}{D_{12} s_{12}^2} dx_{p_2} + \frac{y_{p_2} h_{p_2}}{D_{12} s_{12}^2} dy_{p_2} + \frac{D_{12}}{s_{12}^2} dh_{p_2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{1}{s_{12} s_{13} \sin \alpha} [(-x_{p_3} h_{p_2} + 2x_{p_2} h_{p_3}) dx_{p_2} + \\ &(2y_{p_2} h_{p_3} - y_{p_3} h_{p_2}) dy_{p_2} + \\ &(-y_{p_2} y_{p_3} - x_{p_2} x_{p_3}) dh_{p_2} - x_{p_2} h_{p_2} dx_{p_3} - \end{aligned}$$

$$y_{p_2} h_{p_2} dy_{p_3} - (x_{p_2}^2 + y_{p_2}^2) dh_{p_3}] \quad (13)$$

已知 σ 和 Q_X , 利用协方差传播律就很容易计算出 GPS 单历元定向和定姿的精度。

上述公式是比较严密的误差计算公式, 还可以用下面的近似公式表示:

$$\sigma_\psi = \frac{\sigma_2}{s_{12}}, \sigma_\beta = \frac{\sigma_{h_{p_2}}}{s_{12}}, \sigma_\alpha = \frac{\sigma_{h_{p_3}}}{d_{3-12}} \quad (14)$$

式中, σ_2 为 B 点的平面点位中误差; d_{3-12} 为 C 点到直线 AB 的距离。通常点位中误差 σ_2 为 0.5cm, 高程中误差 $\sigma_{h_{p_1}}$ 一般为 1cm。可以推算, 对于 1m 的基线, 定向大约可达到 0.1° 的精度, 姿态测定可达到 0.2° 的精度。

4 静态模式下的平滑计算方案

上述模型是针对动态定姿和定向而言的, 在一些特殊的应用中, 有时并不需要每一历元都计算出载体的姿态, 如流动导弹发射平台, 往往有一段相对的静态观测时间, 如几分钟。此时可以利用单历元定姿方法的平滑公式达到静态定位的效果, 只要给系统输入静态观测时段信号即可。姿态参数的平滑值采用简单的加权平均:

$$\theta = \frac{1}{\sigma_\Sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{\sigma_i^2} \quad (15)$$

式中, $\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}$; n 为静态观测时段的历元数; θ_i 为各个历元计算出的姿态参数; σ_i 为对应的中误差。平滑值的精度可以表示为:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{\sigma_\Sigma}} \quad (16)$$

按平滑方法计算出姿态的三个参数及其精度同静态定位方法的计算值非常接近, 是一种行之有效的近似处理方法, 使得 GPS 单历元定姿方法的用途更加广泛。

5 模拟算例

5.1 测姿算例

在一建筑物顶布设一 $\triangle ABC$, 边长分别为 38.636m、31.6113m、9.7214m, 长边 AB 作为航向参考方向。使用 Javad 双频 GPS 接收机, 在 3 个点上同步观测, GPS 观测采样间隔为 1s, 共观测 9800 个历元。首先按静态观测方法测定三点的精确坐标, 相对定位精度达到 1ms, 进一步可以计算出精确的航向角 ψ 、横滚角 α 、纵滚角 β , 作为单历元测姿的比较标准, 计算结果见表 1。利用每一历元观测作虚拟动态定位, 根据新方法计算出每一历元的姿态参数, 如图 2。与静态的姿态精确值作比较, 误差统计见表 1。

表 1 单历元定向和姿态确定精度统计/ $^\circ$

Tab. 1 Precision of Attitude Determination			
	航向 ψ	横滚角 α	纵滚角 β
静态结果	114.186	6.594	-7.995
最大值	114.197	6.627	-8.130
最小值	114.170	6.564	-7.876
平滑值	114.186	6.594	-7.995
中误差	0.003	0.007	0.027

5.2 定向算例

GPS 定向使用两台接收机, 天线距离(基线长度)约 15m, 采样间隔为 3s, 共观测 174 个历元(约 10min)。与测姿算例相同, 先用静态方法测得精确的方位角和俯仰角, 其值分别是 215.267° 、 0.485° (图 3(a)、3(b)中的细直线), 然后将每一历元观测作虚拟动态定位, 计算出每一历元的方位角和俯仰角, 在图 3(a)、3(b)中用圆点表示。图 3(c)、3(d)为定向的精度, 图中的粗曲线代表平滑计算的结果, 80 历元(4min)以后的平滑值已非常接近静态观测值。

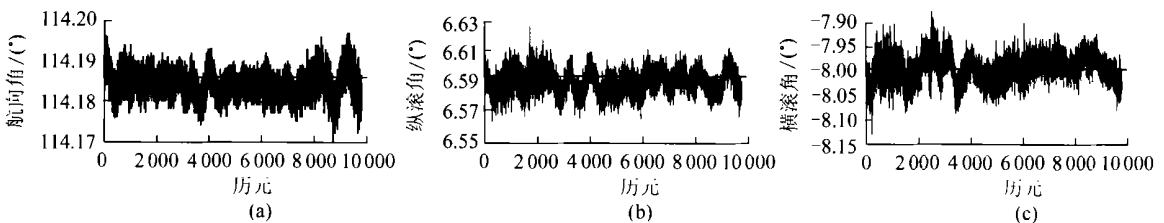


图 2 GPS 单历元测姿结果(图中直线为静态结果)

Fig. 2 Attitude Determination with Single Epoch GPS Positioning Algorithm

GPS 定向测姿的误差主要来源于 GPS 定位的误差, 动态定位的精度一般为 cm 级, 当观测卫星数较多时, 定位精度可以达到几 min。在 GPS 定位精度确定的情况下, 测姿精度取决于基线的

长度, 基线越长, 测姿精度越高。另一方面, GPS 获得的平面精度通常比高程精度高, 因此方位角测定精度一般都高于横滚角和纵滚角, 在两个算例中也得到验证。本文试验为虚拟动态结

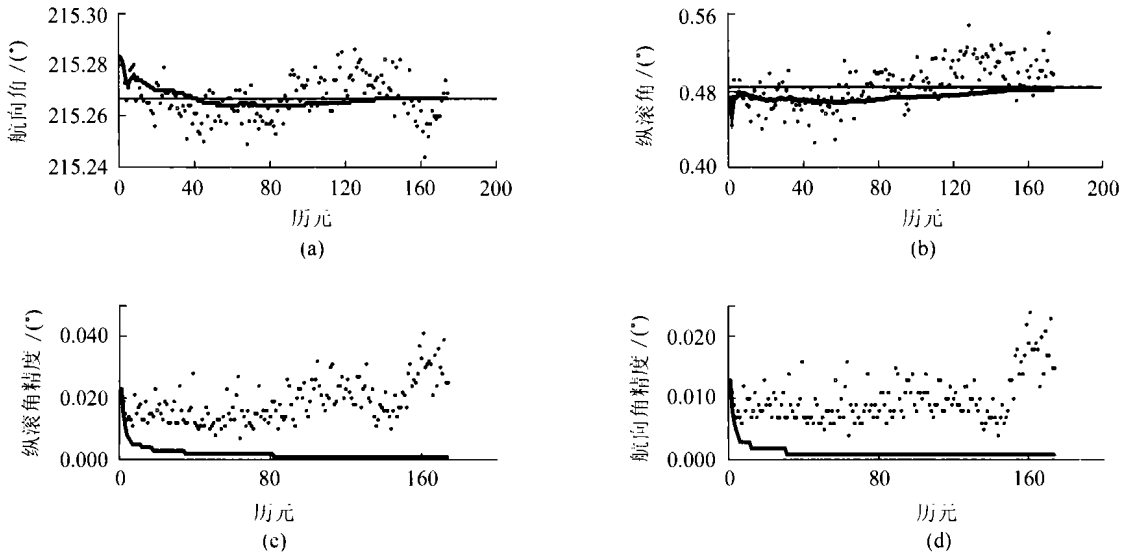


图 3 GPS 单历元定向
(基线长 15m, 图中直线为静态结果, 曲线为平滑结果)

Fig. 3 Orientation Determination with Single Epoch GPS Positioning Algorithm

果, 实际动态观测值的随机误差比静态观测大, 定向和测姿精度有所降低。

参 考 文 献

- 1 陈永奇, James L. 单历元 GPS 变形检测数据处理方法的研究. 武汉测绘科技大学学报, 1998, 23(4): 324~363
- 2 Teunissen P J G. The Least Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: a Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation. Journal of Geodesy, 1995 (70): 65~82
- 3 Liu G Y, Zhu Y Z, Zhu C L. Damped LAMBDA AT

- gorithm for Single Epoch GPS Positioning. 2002 International Symposium on GPS/ GNSS, Wuhan, 2002
- 4 赵建虎, 刘经南, 周丰年. GPS 测定船体姿态方法研究. 武汉测绘科技大学学报, 2000, 25(4): 353~357
- 5 张宏兵, 葛茂荣, 过静琚. GPS 姿态确定原理及软件设计. 测绘通报, 1999(12): 27~29
- 6 Chayward R, Demoz G E, Powell J D. GPS-based Attitude for Aircraft. <http://einstein.stanford.edu/gps> 2003

第一作者简介: 刘根友, 副研究员。现主要从事高精度 GPS 定位方法研究和数据处理工作。

E-mail: genyou@163.net

Determining Attitude with Single Epoch GPS Algorithm and Its Precision Analysis

LIU Genyou¹ OU Jikun¹

(1 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 174 Xudong Road, Wuhan, China, 430077)

Abstract: This paper presents a new method for attitude determination with GPS; the damped LAMBDA algorithm with coordinates functional constraint. And the precision estimation of azimuth and attitude are discussed. The attitude determination has the following two characteristics: ① the baselines are very short, so that the satellite orbit errors and atmosphere delay errors can be removed through double difference; ② the length of every baseline is fixed. This is helpful for fixing ambiguities.

Key words: attitude determination; GPS; single epoch; LAMBDA

About the first author: LIU Genyou, associate researcher. His research orientation is high precision GPS data processing and algorithm. E-mail: genyou@163.net