

# 地球重力场平差模型误差的控制

陶本藻<sup>1</sup>

(1 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

**摘要:** 针对模型误差, 给出了函数模型优选的标准; 提出了衡量模型误差大小的精确度指标及实用估计方法; 给出了估计函数模型拟合精度的标准差公式。

**关键词:** 地球重力场; 模型误差; 精确度; 平差模型

**中图法分类号:** P312; P207

在进行重力网平差、整体大地网平差、地球重力场反演、重力异常、垂线偏差和程异常的拟合推估, 以及回归和多元回归分析时, 都要建立函数模型。不论是确定性函数模型, 还是拟合、回归模型, 从理论上讲, 都不可避免地存在模型误差。

在模型误差存在的情况下, 函数模型需要进行优选。在重力场平差模型中, 许多函数模型属于回归和拟合类模型, 优选函数模型的重要性更为突出。

本文在文献[1]的回归模型优选思想的基础上, 推导出平差函数模型的优选准则, 给出了识别模型误差和实际模型精度估计的实用方法。

## 1 函数模型的优选准则

### 1.1 实际模型的最小二乘平差

设实际采用的模型为:

$$L = AX + \Delta \quad (1)$$

不失一般性, 设随机模型为:

$$D_L = \sigma^2 I_{n \times n} \quad Q_{LL} = I \quad (2)$$

式中,  $I$  为单位阵。参数  $X$  的最小二乘估值为:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L = N^{-1} A^T L = Q_{XA}^T L \quad (3)$$

残差为:  $V = AN^{-1} A^T L - L = -RL$  (4)

其中,  $R = I - J$ ,  $J = AN^{-1} A^T$  (5)

为平差因子<sup>[2]</sup>。

以下推导公式时常用到如下性质:  $J$ 、 $R$  均为对称幂等阵, 其秩( $R$ )等于其迹( $\text{tr}$ ), 即

$$JJ = J, RR = R$$

$$R(J) = \text{tr}(J) = t, R(R) = r = n - t \quad (6)$$

且有:  $JA = A, RA = 0, JV = 0, RV = V$  (7)

残差协因数阵为:

$$Q_{VV} = RIR = R \quad (8)$$

平差值  $L = L + V = L - RL = JL$  的协因数阵为:

$$Q_{LL} = J, Q_{LV} = 0 \quad (9)$$

### 1.2 函数模型的优选准则

设函数模型误差为  $\epsilon$ , 函数的理论模型为:

$$L = AX + \epsilon + \Delta \quad (10)$$

则实际模型  $AX$  与理论模型  $AX + \epsilon$  之差为:

$$\delta = A(X - X) + \epsilon = R\epsilon - J\Delta \quad (11)$$

式中顾及了式(10)和式(3)。可见  $\delta$  是系统误差  $\epsilon$  和偶然误差  $\Delta$  合并影响的综合误差, 衡量其精确度的指标是均方误差, 即

$$\text{MSE}(\delta) = E(\delta^T \delta) = \text{tr}(JD\Delta J) + (R\epsilon)^T R\epsilon \quad (12)$$

因为

$$\text{tr}(JD\Delta J) = \text{tr}(JD\Delta) = \sigma^2 \text{tr}(J) = t\sigma^2 \quad (13)$$

故有:

$$\text{MSE}(\delta) = \epsilon^T R\epsilon + t\sigma^2 \quad (14)$$

即实际模型偏差的精确度不仅取决于模型误差  $\epsilon$  的大小, 而且还与模型参数的个数及观测精度有关。MSE( $\delta$ )小, 实际函数模型为优, 式(14)即为优选函数模型的准则。

### 1.3 实际模型和理论模型偏差的精度估计

式(14)中的  $\epsilon$  为未知, 为了实用, 必须对式中的  $\epsilon^T R \epsilon$  作出估计。将式(10)代入式(4), 顾及平差因子性质可得:

$$V = -R(AX + \epsilon + \Delta) = -R\epsilon - R\Delta \quad (15)$$

及

$$E(V^T V) = E(\epsilon^T R \epsilon) + E(\Delta^T R \Delta) = \epsilon^T R \epsilon + (n - t)\sigma^2 \quad (16)$$

由此即得  $\epsilon^T R \epsilon$  的估值为:

$$\epsilon^T R \epsilon = V^T V - (n - t)\sigma^2 \quad (17)$$

由于式(17)中用  $V^T V$  代替  $E(V^T V)$ , 式中有可能出现负值, 且  $R$  为非负定矩阵, 则  $\epsilon^T R \epsilon$  恒为正值, 故在出现负值时, 可取  $\epsilon^T R \epsilon = 0$ , 为模型误差  $\epsilon$  不显著的情况。式(17)进一步表明,  $\epsilon^T R \epsilon$  的估值不仅与残差平方和的大小有关, 而且与观测精度的多余观测数  $n - t$  的倍数有关。

一般地, 将式(17)代入式(14), 即得实际模型与理论模型偏差的精确度估计公式为:

$$MSE(\hat{\delta}) = V^T V + (2t - n)\sigma^2 \quad (18)$$

$\hat{\delta}$  的最大值估计公式为:

$$\hat{\delta}_{max} = k \sqrt{V^T V + (2t - n)\sigma^2} \quad (19)$$

当  $\delta$  为正态分布时, 取  $\alpha = 0.05, k = 1.96; \alpha = 0.0027, k = 3$ 。如果  $\delta$  的分布未知, 可按切贝雪夫不等式, 取  $\alpha = 0.10, k = 3.2$ 。

当式(17)的  $\epsilon^T R \epsilon = 0$  时, 认为模型误差不显著, 则有:

$$MSE(\hat{\delta}) = t\sigma^2 \quad (20)$$

$$\hat{\delta}_{max} = k\sqrt{t}\sigma \quad (21)$$

## 2 模型误差的识别

如果函数模型误差不显著, 可认为模型参数的最小二乘估计是最优的。为此, 需对模型误差是否显著进行识别。

直接利用式(14), 对  $\epsilon^T R \epsilon$  与  $t\sigma^2$  两项进行比较, 其中  $\epsilon^T R \epsilon$  按式(17)估计。如果  $\epsilon^T R \epsilon$  的大小与  $t\sigma^2$  相比不很显著, 可近似地认为模型误差不显著, 为此, 可采取如下识别方法:

$$\epsilon^T R \epsilon = V^T V - (n - t)\sigma^2 \leq kt\sigma^2 \quad (22)$$

由于实际函数模型一般总存在着模型误差, 所谓不显著, 实际是指模型误差比较小, 如在重力场平差模型中, 可允许存在这种比较小的模型误差, 所以在重力场模型中,  $k$  值可考虑取为 1~3。

如果式(22)不成立, 可认为该函数模型不可取, 反之可取, 但函数模型不一定最优, 最优的函

数模型是  $\delta$  的均方误差最小。

## 3 GPS 水准高程异常拟合实例

图 1 和表 1 所列 of 实测点的分布和已知高程异常数据, 已知高程异常数据标准差  $\sigma = 2\text{cm}$ 。

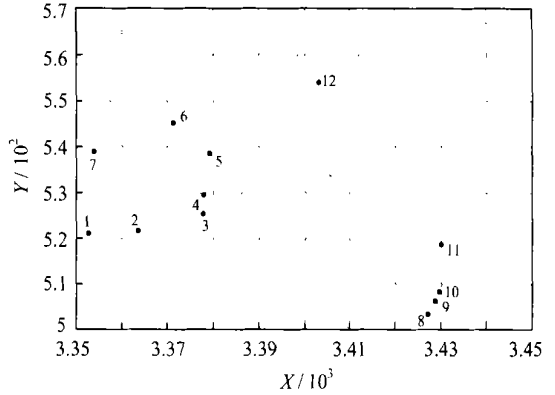


图 1 GPS 水准分布

Fig. 1 Distribution of GPS

表 1 已知高程异常点的坐标

Tab. 1 Coordinates of Height Anomaly Points

点号	大地高	水准高	高程异常
1	15.348	3.949	11.399
2	15.153	3.86	11.293
3	21.214	9.926	11.288
4	19.758	8.388	11.37
5	17.638	6.043	11.595
6	15.227	3.392	11.835
7	24.415	12.576	11.839
8	19.686	8.837	10.849
9	18.106	7.205	10.901
10	19.685	8.743	10.942
11	20.168	9.069	11.099
12	19.345	8.704	10.641

### 3.1 方案 1

对全测区的 12 个已知点分别选用不同点数拟合一次、二次和三次多项式, 分析大范围拟合模型的优选情况, 表 2 为部分有代表性的和最好的一些拟合结果。

分析表 2 结果可以得出以下几个方面。

1) 全测区采用二阶多项式拟合高程异常为佳, 即  $\zeta = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2$ 。

2) 采用序号 2 的 7 个已知数据拟合的二阶多项式, 其拟合效果也很好, 这是因为该 7 个点分布均匀, 且包含了最大、最小高程异常值; 而序号 3 的 7 个点的拟合模型则存在很大模型误差, 因为这 7 个点无论是其分布还是大小, 都不能代表 12 个已知数据。

表2 全测区拟合多项式计算结果

Tab. 2 Results of Polynomial Fitting in the Whole Area

序号	拟合点号	阶数	$V^T V$	$\epsilon^T R \epsilon$ 按式(17)计算	$t\sigma^2$	MSE( $\delta$ )	$\epsilon$ 是否为 0
1	全部 12 个点	1	67.28	31.28	12	42.28	×
		2	6.65	0	24	24.00	✓
		3	59.168	59.160	40	59.200	×
2	1, 3, 5, 7, 8, 11, 12	1	72.78	36.78	12	48.78	×
		2	9.53	0	24	24.00	✓
3	3, 4, 5, 8, 9, 10, 11	1	159.69	123.69	12	135.69	×
		2	441.08	417.08	24	441.08	×

3) 比较序号 1 与序号 2 的两个二阶多项式, 平均差为 6.1cm, 最大差为 9.8cm, 一般仅差 2~4cm。由于 12 个已知数据并未发现粗差, 故应采用全区 12 个点拟合的二阶多项式为最佳拟

合模型。

### 3.2 方案 2

对图 1 中点号为 1, 2, ..., 7 的 7 个已知点作与方案 1 类似的分析, 计算结果列于表 3。

表3 部分测区拟合多项式计算结果

Tab. 3 Results of Polynomial Fitting in the Partial Area

序号	拟合点号	阶数	$V^T V$	$\epsilon^T R \epsilon$ 按式(17)计算	$t\sigma^2$	MSE( $\delta$ )	$\epsilon$ 是否为 0
1	全部 7 个点	1	6.39	0	12	12	✓
		2	0.13	0	24	24	✓
2	1, 3, 5, 7	1	10.70	0	12	12	✓
3	1, 4, 6, 7	1	8.29	0	12	12	✓

分析表 3 可得出以下几个方面。

1) 用全部 7 个点拟合的一阶和二阶多项式, 经统计两者最大差为 1.87cm, 平均差为 -1.4cm, 可见均为适宜的模型, 按 MSE( $\delta$ ) 的大小, 选一阶多项式为宜。

2) 选其中有代表性的 4 个点也能得出较好的拟合模型, MSE( $\delta$ ) 也很小。

3) 从  $V^T V$  值的比较看出, 该测区 7 个已知点可认为不存在粗差, 考虑该测区的高程异常变化不大, 最后可选用序号 1 的一阶多项式为拟合模型, 即  $\zeta = b_0 + b_1 x + b_2 y$ 。

### 参 考 文 献

- 1 王正明, 易东之. 测量数据建模与参数估计. 长沙: 国防科技大学出版社, 1996. 97~100
- 2 陶本藻. 平差因子与平差结构. 大地测量与地球动力学, 2002, 22(3): 6~9
- 3 陶本藻. 测量数据统计分析. 北京: 测绘出版社, 1992. 83~91
- 4 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础. 武汉: 武汉大学出版社, 2003. 18~21
- 5 崔希璋, 於宗伟, 陶本藻, 等. 广义测量平差. 武汉: 武汉大学出版社, 2001

作者简介: 陶本藻, 教授, 博士生导师. 现主要从事现代测量数据处理和地壳形变地球动力学解释的研究。

## Control of the Adjustment Model Errors for the Earth's Gravity Field

TAO Benzao<sup>1</sup>

(1 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China 430079)

**Abstract:** There exist inevitably model errors in the adjustment function models of the earth's gravity field, due to the various systematic errors. The quality of adjustment results in some extent depends on the errors of the function models. For this purpose, the errors of the function models have to be compensated or controlled to the greatest extent. The optimum

(下转第 709 页)

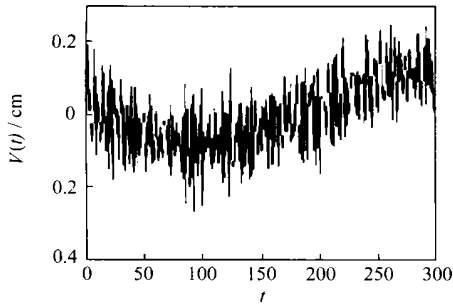


图 4 平差后的改正数

Fig. 4 Corrections after Adjustment

其中  $Z_P(t_i)$  为由 GPS/INS 观测值得到的  $t_i$  时刻投影中心的  $Z$  坐标, 它是平差计算的观测值,  $Z_P$  为待定的平均航高,  $S_Z(t_i)$  为待定的表示围绕  $Z_P$  波动的非线性函数在  $t_i$  时刻的估值。计算表明, 半参数拟合法不需要建立精确的参数模型, 模型

误差可由非参数分量得到, 由残差算得的单位权方差因子为 0.11m, 具有较高的精度。本方法适合于作机载三线阵 CCD 投影中心运动轨迹和像平面姿态的拟合。

## 参 考 文 献

- 1 Gruen A, Zhang L. TLS Data Processing Modules. Institute of Geodesy and Photogrammetry Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Switzerland,
- 2 Habib A, Asmamaw A, Kelley D, et al. Linear Features in Photogrammetry. Columbus Ohio 43210-1275, 2000
- 3 孙海燕, 吴云. 半参数回归与模型精化. 武汉大学学报·信息科学版, 2002, 27(2): 172~174

第一作者简介: 孙海燕, 教授, 博士生导师。现从事测量数据处理理论与方法的教学与研究。

## Semi-Parametric Fitting of the Track of Perspective Center and Attitude of Airborne TLS CCD System

SUN Haiyan<sup>1</sup> LI Ruiming<sup>2</sup> YAN Li<sup>1</sup>

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 Qingdao Institute of Exploration and Surveying, 2 Renmin Road, Qingdao, China, 266033)

**Abstract:** When the position of the perspective center and the attitude of the CCD camera on the exposing time is known, the coordinates of ground points can be calculated from the images gotten from TSL CCD. The method for fitting the position of the camera center and the attitude functions is basic for image georeferencing. According to the character of the data given by GPS/INS, a semi-parametric method is proposed. Simulated calculation indicates that this method can reduce the systematic errors significantly.

**Key words:** airborne TLS CCD; exterior orientation; data fitting; semi-parametric regression

**About the first author:** SUN Haiyan, professor, Ph.D supervisor. His research interest is in the theory and method of data processing.

(责任编辑: 平子)

(上接第 670 页)

seeking criteria of the adjusted function models are given in this paper. Then the criteria for judging the function model errors are presented, as well as their practical estimation methods. Furthermore, the formulae for evaluating the fitting standard deviation of the function models are given.

**Key words:** Earth's gravity field; model errors; accuracy; adjustment model

**About the author:** TAO Benzao, professor, Ph.D supervisor. His research orientations are data processing and geophysics interpretation of crustal deformation.

(责任编辑: 平子)