DOI :10.13203/j.whugis2003.06.006
第28卷 第6期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 28 No. 6
2003年12月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Dec. 2003

文章编号：1671-8860(2003)06-0655-03 文献标识码：A

球外部空间的 Neumann 逆问题及逆 Stokes 公式

李建成[1]

（1 武汉大学测绘学院，武汉市珞喻路129号，430079）

摘 要：基于修改的 Poisson 积分，首先给出了球面扰动位向上延拓的积分表达式。在此基础上，由微分原理得出了球外部空间 Neumann 逆问题的解式，利用物理大地测量学的基本微分方程，导出了球外部空间的逆 Stokes 公式，并对这两类积分公式的核函数进行了讨论。

关键词：Neumann 逆问题；逆 Stokes 公式；向上解析延拓

中图法分类号：P312

Molodenskii、Eremeev 和 Yurkina 1960 年在《地球形状与外部引力场的研究方法》一书中系统地导出了逆 Stokes 公式，它是以扰动位或大地水准面高作为输入数据计算大地水准面上的重力异常。这个公式推导的基础是：利用球外部位是调和函数这一性质满足 Green 变换，由此得到了球外部逆 Neumman 问题的数学关系。由这一关系式，并结合物理大地测量学的基本方程给出了逆 Stokes 公式，亦即：

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{R}N_P - \frac{\gamma R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{1}{l^3}(N - N_P)\mathrm{d}\sigma \quad (1)$$

式中，Δg 为空间重力异常；R 为平均地球半径；γ 为平均地球重力；N 为大地水准面高；σ 为单位球；$l = 2R\sin\frac{\psi}{2}$为计算点 P 与流动点间的距离。逆 Stokes 公式曾广泛用于卫星测高获取的大地水准面反演重力异常(Rummel 等，1977；李建成，1996)。

从式(1)的核函数$\frac{1}{l^3}$可以看出，它只能计算大地水准面上的重力异常，而不能计算大地水准面外空间的重力异常。这是因为 Molodenskii 等(1960)导出的逆 Neumman 问题的解仅定于球面上，即

$$\frac{\partial U_P}{\partial r} = -\frac{1}{R}U_P + \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{1}{l^3}(U - U_P)\mathrm{d}\sigma \quad (2)$$

式中，U 为任意调和函数，计算点 P 为球面上的点。本文针对这一局限性，利用修改的 Poisson 积分研究其球外部解的向上延拓的表达式。

1 理论推导

外部扰动位是调和函数，可应用 Poisson 积分实施向上延拓。因此，现利用修改(不含零阶和一阶项)的 Poisson 积分有(Heiskanen 和 Moritz，1967)：

$$T(r,\varphi,\lambda) = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma\Big(\frac{Rr^2}{l^3} - \frac{R^3}{l^3} - \frac{R}{r} - \frac{3R^2}{r^2}\cos\psi\Big)T(R,\varphi,\lambda)\mathrm{d}\sigma \quad (3)$$

式中，$T(R,\varphi,\lambda)$是半径为 R 的球面上的扰动位；$T(r,\varphi,\lambda)$为球外部的扰动位；(r,φ,λ)为计算点的球坐标(地心距离、地心纬度和地心经度)；$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}$为计算点$P$ 与流动点间的空间距离，ψ是计算点 P 与流动点间的球面角距。将式(3)对径向变量 r 微分，可得：

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma M(r,\psi)T(R,\varphi,\lambda)\mathrm{d}\sigma \quad (4)$$

式中，

$$M(r,\psi) = \frac{R^2}{l^5}(5R^2r - r^3 - Rr^2\cos\psi - 3R^3\cos\psi) + \frac{R^2}{r^2} + \frac{6R^3}{r^3}\cos\psi \quad (5)$$

在大地水准面上，当 $r = R$，由球面上的扰动位计算球面上的扰动位一阶径向导数的积分核函数为：

收稿日期：2003-10-13。

项目来源：国家自然科学基金资助项目(40274004)。

$$M(R,\psi)=\frac{1}{4\sin^3\dfrac{\psi}{2}}+7-12\sin^2\frac{\psi}{2}\tag{6}$$

在 $\psi\to 0$ 时,式(6)的右边的第一项出现奇异,即 $M(R,\psi)\to\infty$。奇异问题的处理可采用如下的方法(Li, 2002),取平面极坐标系(s, α),将流动点的扰动位以计算点 P 展开为 Taylor 级数:

$$T=T_P+xT_x+yT_y+\cdots\tag{7}$$

式中,(T_x, T_y)为扰动位在 P 点沿 x、y 方向的梯度。顾及 $\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{R^2}s\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha$ 和 $s=2R\sin\frac{\psi}{2}$,将 $M(R,\psi)$ 及式(7)代入式(4),可得奇异点处的扰动位一阶径向导数为:

$$T_{rP}=\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{s=0}^{s_0}\frac{2}{s^3}(T_P+s\cos\alpha T_x+s\sin\alpha T_y)s\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{s_0}\frac{2}{s^2}T_P\mathrm{d}s\tag{8}$$

由式(8)可知,在计算点的贡献仍趋于无穷大。因此,不能采用上述奇异积分处理方法解决它的数值积分奇异问题。

假设扰动位的调和函数有(Heiskanen 和 Moritz, 1967):

$$T(r,\varphi,\lambda)=\frac{R}{r}\tag{9}$$

在大地水准面上,扰动位为:

$$T(R,\varphi,\lambda)=1\tag{10}$$

将式(9)对 r 微分,得:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{R}{r^2}\tag{11}$$

将式(10)和式(11)代入式(4),得:

$$-\frac{R}{r^2}=\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma M(r,\psi)\mathrm{d}\sigma\tag{12}$$

将式(12)两边同乘以 T_P,并与式(4)相减得:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{R}{r^2}T_P+\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma M(r,\psi)(T-T_P)\mathrm{d}\sigma\tag{13}$$

式(4)和式(13)为球外部空间的 Neumann 逆问题的广义表达式,可以由球面上任意调和函数计算其球外部空间的径向导数。

根据物理大地测量学的基本微分方程

$$\Delta g=-\left(\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2}{r}T\right)\tag{14}$$

和式(3)、式(4),可以得到球面上的扰动位计算球外部重力异常的广义封闭积分关系,即

$$\Delta g=\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma K(r,\psi)T\mathrm{d}\sigma\tag{15}$$

式中,

$$K(r,\psi)=-\frac{R^2}{l^5}(5R^2r-r^3-Rr^2\cos\psi-3R^3\cos\psi)-\frac{2R^2r}{l^3}+\frac{2R^4}{l^3r}+\frac{R^2}{r^2}\tag{16}$$

将式(9)和式(11)代入式(14),得:

$$\Delta g(r,\varphi,\lambda)=-\left(\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2}{r}T\right)=-\frac{R}{r^2}\tag{17}$$

将式(10)和式(17)代入式(15),得:

$$-\frac{R}{r^2}=\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma K(r,\psi)\mathrm{d}\sigma\tag{18}$$

式(18)两边同乘以 T_P 并减去式(15),得:

$$\Delta g=-\frac{R}{r^2}T_P+\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma K(r,\psi)(T-T_P)\mathrm{d}\sigma\tag{19}$$

式(15)就是所谓的广义逆 Stokes 公式。在大地水准面上,其核函数为:

$$K(R,\psi)=-\frac{1}{4\sin^3\dfrac{\psi}{2}}+1\tag{20}$$

2 理论分析

图 1 给出了 Molodenskii(1960)和本文导出的球外部逆 Neumman 问题当 $r=R$ 时的积分核函数,从图中可以看出,两者的核函数存在着差异。其差异的特性是在 ψ 小于 99.594 068 2°时,前者核函数小于后者的核函数;在 ψ 大于 99.594 068 2°时,后者核函数小于前者的核函数。比较式(2)和式(13),其差异为 $7-12\sin^2\frac{\psi}{2}$,造成差异的原因是因为 Molodenskii 的核函数包括了调和函数的零阶和一阶项,而本文是基于修改的 Poisson 积分公式导出的,这样,积分核函数不含有零阶和一阶项。从这种意义上讲,两者的结果是相同的。

同样,图 2 给出了两者逆 Stokes 公式在球面

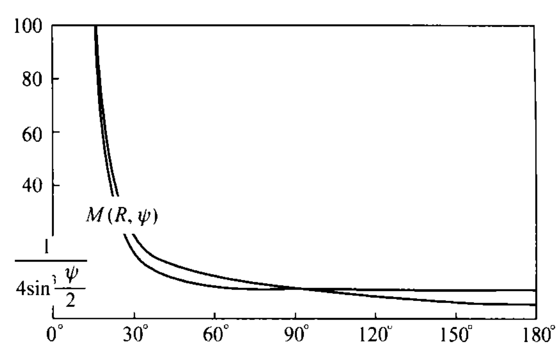

图 1 扰动位计算球面上扰动位一阶径向导数的积分核函数

Fig. 1 Characteristic of Kernel Function for Converting Disturbing Potential to Its First-Order Derivative with Respect to Radial Distance

上的积分核函数曲线。比较式(1)和式(20)，它们的差异恒为 1。可以证明，这个差异也是因为是否包含有调和函数的零阶和一阶项。

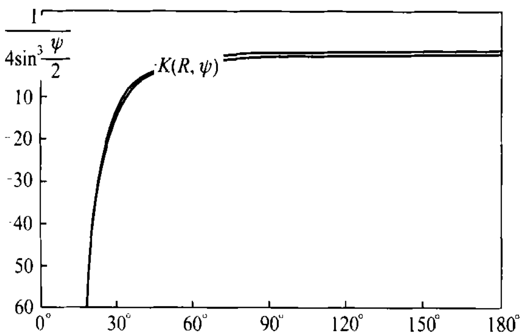

图 2　扰动位计算球面上重力异常的积分核函数

Fig. 2　Characteristic of Kernel Function for Converting Disturbing Potential to Gravity Anomaly

3　结　语

本文的研究意义在于给出的球外部逆 Neumman 问题的数学关系(13)及其积分核函数式(5)是 Molodenskii 等给出的关系的广义形式，相反，Molodenskii 等给出的关系只是本文式(13)的一个特殊情形。得出的逆 Stokes 公式同样是一个球外部空间的重力异常与球面扰动位或大地水准面的广义表达式，利用这一公式可以直接计算球面或其外部任何一点的重力异常。从数值计算方面考虑，利用式(1)是不能直接计算地球外部重力异常的，间接的方法必须分为两步计算。先计算球面上的重力异常，然后再由重力异常的向上延拓公式计算球外部重力异常。从理论上讲，逆Stokes 的广义表达形式不仅揭示了球面上扰动位与球面上重力异常的数学关系，而且也揭示了球面上的扰动位与球外部重力异常的内在关系。

参　考　文　献

1　Li J C. A Cormula for Computing the Gravity Disturbance from the Second Radial Derivative of the Disturbing Potential. Journal of Geodesy, 2002, 76(4): 226~231

2　Rummel R, Sjöberg L, Rapp R H. The Determination of Gravity Anomalies from Geoid Heights Using the Inverse Stokes' formula. Department of Geodetic Science & Surveying, Report No. 269, OSU

3　李建成，宁津生，晁定波. 卫星测高在物理大地测量应用中的若干问题. 武汉测绘科技大学学报，1996，21(1)：9~14

作者简介：李建成，教授，博士生导师。现从事物理大地测量学和空间大地测量学的研究。

E-mail: jcli@wtusm.edu.cn

Inverse Neumann Problem and Inverse Stokes Formula on Exterior Sphere

LI Jiancheng[1]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: An integral for the upward continuation of the disturbing potential is presented based on modified Poisson's integral in which the zero and the first degrees of spherical harmonics are excluded. Differentiating the integral expression with respect to the geocentric distance of computing point, the solution in a closed integral form for the inverse Neumann's exterior problem is then obtained. The closed integral expression for upward continuation of the solutions for inverse Stokes formula is derived in terms of the fundamental differential equation in physical geodesy.

Key words: inverse Neumann's problem; inverse Stokes formula; upward analytical continutation

About the author: LI Jiancheng, professor, Ph. D supervisor. His research orientations are physical geodesy and space geodesy.

E-mail: jcli@wtusm.edu.cn

(责任编辑：　光远)