

一种适用于信号与图像处理的线性多尺度变换方法

段 汕¹ 梅建新¹ 秦前清¹

(1 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

摘 要:以文献[1]的基本思想为基础,对线性塔式变换的理论和方进行了改进和扩展,提出了一种线性多尺度的图像变换方法,并通过实例对该变换的具体构造方法进行了说明,对其算法的处理效果进行了测试。

关键词:多尺度分析;线性多尺度变换;双正交条件

中图法分类号:P237.3

目前,多尺度分析技术已成为数字图像处理和计算机视觉领域中的一项重要技术,它是对人类视觉系统信息处理方式的一种自然表达,基于不同尺度下目标所包含的重要物理特征对图像进行分析处理。多尺度方法在具体应用中往往伴随着对图像的采样,因此多尺度算法在计算上具有一定的优势。

1 一维线性多尺度变换

考虑整数空间 Z 上平方和的实值序列所成的空间 $l^2(Z)$,在 $l^2(Z)$ 中引入平移变换 τ_k : $(\tau_k x)(n) = x(n-k)$ ($k \in Z$),则其逆变换 $(\tau_k^{-1} x)(n) = x(n+k)$ 。如果 $\psi_m^\uparrow, \psi_m^\downarrow$ 为 $l^2(Z)$ 上的线性算子,并且满足如下条件:

$$\psi_m^\uparrow \tau_k^m = \tau_k \psi_m^\uparrow \text{ 且 } \psi_m^\downarrow \tau_k = \tau_k^m \psi_m^\downarrow, m \in Z^+ \quad (1)$$

则存在卷积核 $h, h \in l^2(Z)$,使得 $\psi_m^\uparrow, \psi_m^\downarrow$ 可以表示为如下形式:

$$\psi_m^\uparrow(x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(mn-k)x(k) \quad (2)$$

$$\psi_m^\downarrow(x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-mk)x(k) \quad (3)$$

事实上,若在 ψ_m^\downarrow 所给出的线性系统中,脉冲信号 $\delta(n)$ 的脉冲响应为 $h(n)$,对于任意的输入信号 $x(n) \in l^2(Z)$,利用信号的基本理论^[2~4]知, $x(n) = \sum_k x(k) \delta(n-k)$ 。由条件(1)可得:

$$\psi_m^\downarrow(x)(n) = \sum_k x(k) h(n-mk)$$

这就证明了式(3)。对于 $m=1$,若 $\delta(n)$ 在 ψ_1^\uparrow 系统下的脉冲响应为 $h(n)$,则

$$\psi_1^\uparrow(x)(n) = \sum_k x(k) \psi_1^\uparrow(\delta(n-k)) = \sum_k x(k) h(n-k)$$

对于 $m=2$,若 ψ_2^\uparrow 所给出的线性系统对于 $\delta(n)$ 的脉冲响应为 $h_2^0(n)$,对于 $\delta(n-1)$ 的脉冲响应为 $h_2^1(n-1)$,将信号 $x(n)$ 表示成奇、偶两个部分:

$$x(n) = \sum_k x(k) \delta(n-k) = \sum_k x(2k) \delta(n-2k) + \sum_k x(2k+1) \delta(n-1-2k)$$

$$\text{则 } \psi_2^\uparrow(x)(n) = \sum_k x(2k) h_2^0(n-k) + \sum_k x(2k+1) h_2^1(n-k-1)$$

定义 $h(n)$,使得 $h(2n) = h_2^0(n), h(2n+1) = h_2^1(n)$,则有:

$$\psi_2^\uparrow(x)(n) = \sum_k x(k) h(2n-k)$$

对于 $m>2$,依据 $m=2$ 时对于 ψ_2^\uparrow 的处理方法,将 $x(n) = \sum_k x(k) \delta(n-k)$ 分成 m 个部分:

$$x(n) = \sum_k x(k) \delta(n-k) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_k x(km+j-1) \delta(n-km-j+1)$$

对于 $j=0, 1, \dots, m-1$,引入 ψ_m^\uparrow 系统下 $\delta(n-j)$ 各自的响应函数 $h_m^j(n-j)$,且利用式(1)可得:

$$\begin{aligned} \psi_m^\uparrow(\delta(n - km - j)) &= \psi_m^\uparrow \tau_k^m(\delta(n - j)) = \\ \tau_k \psi_m^\uparrow(\delta)(n - j) &= \tau_k(h_m^j)(n - j) = \\ h_m^j(n - k - j) \end{aligned}$$

则有:
$$\psi_m^\uparrow(x)(n) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_k x(km+j)h_m^j(n-k-j)$$

若定义 $h(n)$, 使得 $h(mn - j) = h_m^j(n - k - j)$, $j = 0, 1, \dots, m - 1$, 最后得到:

$$\psi_m^\uparrow(x)(n) = \sum_k x(k)h(mn - k)$$

由此便完成了以上结论的证明。由式(1)~式(3)所得出的算子 ψ_m^\uparrow 、 ψ_m^\downarrow 包含文献[1]中 $m = 2$ 时的线性塔式变换的特例, 它给出线性塔式变换在 各种不同尺度下的结构特点, 是一种线性多尺度的变换形式。经计算, 塔式条件^[1] $\psi_m^\uparrow \psi_m^\downarrow = id$ 具有形式 $\sum_k h(mn - k)h(k - mj) = \delta(n - j)$, 如果令 $j = 0$, 则可得出与塔式条件等价的一维线性多尺度变换的正交条件:

$$\sum_k h(mn - k)h(k) = \delta(n) \quad (4)$$

2 二维线性多尺度变换

引入二维平移变换 $\tau_{(k, l)}: \tau_{(k, l)}(x)(n_1, n_2) = x(n_1 - k, n_2 - l)$, 其中 $(k, l) \in \mathbf{Z}^2$, 用与一维情况类似的方法可得出, 存在卷积核 $h_1, h_1 \in l^2(\mathbf{Z}^2)$, 使得二维线性多尺度算子 $\psi_{(m_1, m_2)}^\uparrow, \psi_{(m_1, m_2)}^\downarrow$ 具有如下形式:

$$\psi_{(m_1, m_2)}^\uparrow(x)(n_1, n_2) = \sum_{j, k} h_1(m_1 n_1 - j, m_2 n_2 - k)x(j, k), \quad m_1, m_2 \in \mathbf{Z}^+$$

$$\psi_{(m_1, m_2)}^\downarrow(x)(n_1, n_2) = \sum_{j, k} h_1(m_1 n_1 - j, m_2 n_2 - k)x(j, k), \quad m_1, m_2 \in \mathbf{Z}^+$$

由基于 \mathbf{Z}^2 结构的两个正交方向上的一维算子(2)~(3)的复合, 不难说明 $l^2(\mathbf{Z}^2)$ 上的二维卷积核 $h_1, h_1 \in l^2(\mathbf{Z}^2)$ 的存在性。事实上,

$$\psi_{(m_1, m_2)}^\uparrow(x)(n_1, n_2) = \sum_{j, k} h(m_1 n_1 - j)h(m_2 n_2 - k)x(j, k), \quad m_1, m_2 \in \mathbf{Z}^+$$

$$\psi_{(m_1, m_2)}^\downarrow(x)(n_1, n_2) = \sum_{j, k} h(n_1 - m_1 j)h(n_2 - m_2 k)x(j, k), \quad m_1, m_2 \in \mathbf{Z}^+$$

令
$$\begin{aligned} h_1(m_1 n_1 - j, m_2 n_2 - k) &= \\ h(m_1 n_1 - j)h(m_2 n_2 - k), \\ h_1(n_1 - m_1 j, n_2 - m_2 k) &= \\ h(n_1 - m_1 j)h(n_2 - m_2 k) \end{aligned}$$

则可得卷积核 $h_1, h_1 \in l^2(\mathbf{Z}^2)$ 。二维线性多尺

度变换的塔式条件表现为以下正交条件的形式:

$$\sum_{j, k} h_1(m_1 n_1 - j, m_2 n_2 - k)h_1(j, k) = \delta(n_1, n_2) \quad (5)$$

式中, $\delta(n_1, n_2)$ 是二维 Dirac-delta 序列, 满足条件 $\delta(0, 0) = 1$, 而对于其余的情况, 有 $\delta(n_1, n_2) = 0$ 。

从以上对于算子 ψ_m^\uparrow 、 ψ_m^\downarrow 及 $\psi_{(m_1, m_2)}^\uparrow, \psi_{(m_1, m_2)}^\downarrow$ 的构造方法可以看到, 设计满足一维及二维双正交条件(4)或(5)的卷积核 h 、 h 是获得线性多尺度变换的关键。利用一维及二维线性多尺度变换可以建立处理信号或图像的线性多尺度处理方法。

3 算法及其应用

取尺度因子 $m = 3$, 满足一维正交条件(4)的一个简单解是:

$$\begin{aligned} h(-1) = h(0) = h(1) = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad h(n) = 0 \quad \text{else} \\ h(-1) = h(0) = h(1) = 1 \quad \text{and} \quad h(n) = 0, \quad \text{else} \end{aligned}$$

它所对应的一对线性多尺度分析与综合算子为:

$$\begin{aligned} \psi_3^\uparrow(x)(n) &= \frac{1}{3}(x(3n - 1) + x(3n) + \\ & \quad x(3n + 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^\downarrow(x)(3n - 1) &= \psi_3^\downarrow(x)(3n) = \\ \psi_3^\downarrow(x)(3n + 1) &= x(n) \end{aligned}$$

它与一维情况下尺度因子 $m = 2$ 的 Haar 变换^[1] 类似, 称其为尺度因子 $m = 3$ 的 Haar 变换。若令 $h(0) = a, h(\pm 1) = b, h(\pm 2) = c$ and $h(n) = 0$ else $h(0) = p, h(\pm 1) = q, h(\pm 2) = r$ and $h(n) = 0$, else 利用正交条件式(4), 可以得出:

$$ap + 2bq + 2cr = 1, \quad cq + br = 0$$

若取 $h(n)$ 为 Burt-Adelson 核^[3], 即 $a = 3/4, b = 1/4, c = -1/8$, 可解得: $r = q/2, q = 8(1 - 3p/4)/3$ 。取 $p = 1$, 则可得到 $q = 2/3, r = 1/3$, 以及与之相对应的一对线性多尺度分析与综合算子, 称其为尺度因子 $m = 3$ 的 Burt-Adelson 线性多尺度变换:

$$\begin{aligned} \psi_3^\uparrow(x)(n) &= \frac{1}{8}(-x(3n - 2) + 2x(3n - 1) + \\ & \quad 6x(3n) + 2x(3n + 1) - x(3n + 2)), \end{aligned}$$

$$\psi_3^\downarrow(x)(3n - 1) = \frac{1}{3}x(n - 1) + \frac{2}{3}x(n),$$

$$\psi_3^\downarrow(x)(3n) = x(n),$$

$$\psi_3^\downarrow(x)(3n + 1) = \frac{2}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n + 1)$$

以上给出了尺度因子 $m = 3$ 时的两个一维线性多尺度变换的实例。下面对于二维情形下的线性多尺度变换的具体形式进行讨论。首先在尺度因子 $m = 2$ 的情况下, 若令

$$\begin{aligned} \bar{h} \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ -1, & 0 \\ -1, & -1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} &= a, \bar{h} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -2, & 1 \\ -2, & -2 \\ 1, & -2 \end{pmatrix} = c, \\ \bar{h} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & -1 \\ 0, & 1 \\ -1, & 1 \\ -2, & 0 \\ -2, & -1 \\ 0, & -2 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} &= b, h \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 2 \\ -1, & 0 \\ 1, & 2 \\ 2, & 1 \\ 0, & -1 \\ -1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} = q, \\ h \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ -1, & 2 \\ 2, & -1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} &= r, h \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = p \end{aligned}$$

利用二维正交条件(5)及归一化条件,经计算可得:

$$b = a, c = \frac{1}{4} - 3a,$$

$$p = q = \frac{4a}{16a-1}, r = \frac{4a-1}{16a-1}$$

以 \bar{h} 和 h 为卷积核的二维线性多尺度变换 ψ_2^{\uparrow} 和 ψ_2^{\downarrow} 具有式(2)和式(3)的形式,其中 $m=2$ 。这里 ψ_2^{\uparrow} 和 ψ_2^{\downarrow} 带有一个自由度因素 $a (a \neq 1/16)$, 其所对应的图像变换结果如图 1 所示。图 1 是对 Lena 图像三层图像分解的测试结果,其图像尺寸从下到上分别为 256 像素×256 像素、128 像素×128 像素、64 像素×64 像素和 32 像素×32 像素。

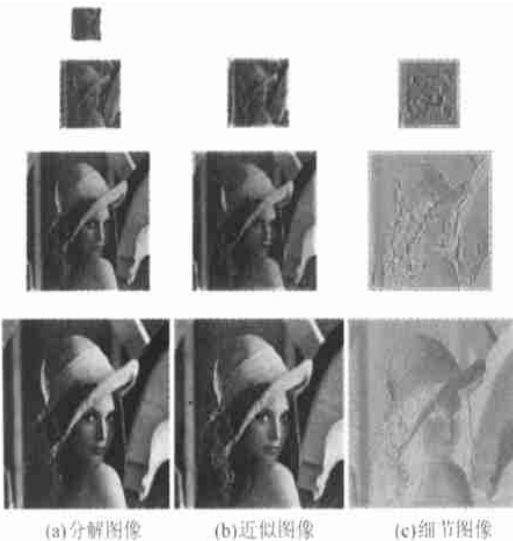


图 1 尺度分解、近似及细节图像($a=0.25$)

Fig.1 Scale Decomposition, Approximate and Detail Image

以上算法所对应的线性多尺度变换具有一个自由度 a , 图 2 给出了 a 的 4 个不同取值情况下,

线性塔式变换所产生的对于图像的分解、重构及细节部分的处理效果(尺寸 256 像素×256 像素)。测试结果表明, 重构图像对于原始图像的逼近程度与 a 的取值有关。从理论上讲, 在使得变换图像的灰值范围保持在原有图像灰值范围内的条件下, a 可以取任何值, 但由于分析与综合算子的具体表示形式依赖于归一化条件的选取, 因此在实验测试中所实现的大多是部分重构, 至于完全重构问题情况则较为复杂。由于多尺度分解的目的在于, 在不同尺度空间中, 变换图像能较好地保持原始图像的重要信息, 因此, a 的选取应使得近似图像尽可能好地逼近原始图像, 这也即是要求细节部分的取值越小越好。从图 2 所给出的测试结果来看, $a=0.2$ 时所对应的变换图像的细节部分反映了近似图像不仅能较好地逼近原始图像, 同时重构图像效果较好。而当 a 相对于 0.2 变小或者变大时, 处理效果都随之变得较差。

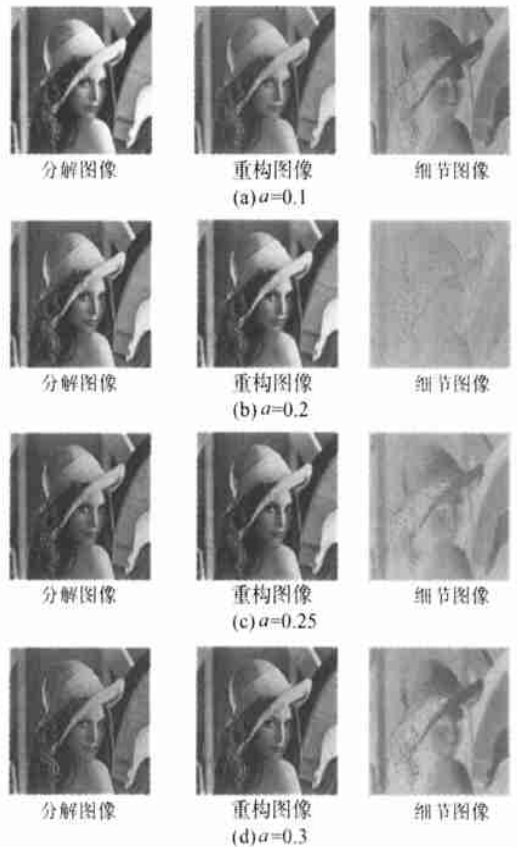


图 2 a 的四种不同取值情况下的分解图像、重构图像及细节图像的处理效果

Fig.2 Processing Image of Decomposition, Reconstructure and Detail for Four Different Values of a

基于 Burt-Adelson 的 3 尺度线性多尺度变换的图像处理效果如图 3 所示。图 3(a)是对于

Lenna 图像的一次分解, 图像尺寸为 86 像素 \times 86 像素, 其余图像尺寸均为 256 像素 \times 256 像素。



图 3 尺度因子 $m=3$ 的分解、重构及细节图像

Fig. 3 Decomposition, Reconstructure and Detail Image for Scale Factor $m=3$

4 结 论

多尺度线性变换既具有线性变换的特点, 又具有多尺度的特征, 其在重构图像方面的优良性使得在具体的图像处理中, 可以通过对图像的多尺度分解实现图像在多尺度下的存储和传输, 然后对图像进行逐级恢复重建获得所需要的各尺度图像。本文不仅从理论上对所提出的多尺度线性变换的方法进行了构造性的证明, 并且从实验的角度对其实用效果进行了测试。

参 考 文 献

- 1 Goutsias J, Heijmans H J A M. Multiresolution Signal Decompositon Schemes. Part 1: Linear and Morphological Pyramids. CWI, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1998
- 2 Rioul O. A Discrete-Time Multiresolution Theory. IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, 41: 2 591 ~ 2 606
- 3 Levan N. Systems and Signals. New York, Inc. Publicatons Division, 1983. 1 ~ 27
- 4 Kong X, Goutsias J. A Study of Pyramidal Techniques for Image Representation and Compression. Journal of Visual Communication and Image Representation, 1994, 5: 190 ~ 203
- 5 Burt P J, Adelson E H. The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code. IEEE Trans. on Communications, 1983, 31: 532 ~ 540
- 6 Heijmans H J A M, Goutsias J. Some Thoughts on Morphological Pyramids and Wavelets. In: Signal Processing IX: Theones and Application. Eusipco, 1998. 133 ~ 136

第一作者简介: 段汕, 博士生。现主要从事图像处理和模式识别的理论研究。

E-mail: Jy5699@sina.com

A Method for Linear Multiscale Transform in Signal and Image Processing

DUAN Shan¹ MEI Jianxin¹ QIN Qianqing¹

(1 State Key Laboratory for Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: The multiscale analysis is one of the most popular techniques used in signal and image processing and computer vision. This paper proposes a method for linear multiscale transform in image processing, improves and extends its theory of linear pyramid transform, presents some examples, and shows how to design this transform algorithms in some scale, and gives some analysis for testing image.

Key words: multiscale analysis; linear multiscale tranform; biorthogonality condition

About the first author: DUAN Shan Ph. D candidate. She majors in image processing and pattern recogniton. E-mail: Jy5699@sina.com

(责任编辑: 燕子)