DOI :10.13203/j.whugis2002.05.009
第 27 卷 第 5 期
2002 年 10 月
武汉大学学报·信息科学版
Geomatics and Information Science of Wuhan University
Vol. 27 No. 5
Oct. 2002

文章编号: 1000-050X(2002)05-0483-03　　　　文献标识码: A

# $p$-范分布参数 $\sigma$ 的估计

胡宏昌[1]　孙海燕[1]

（1　武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079）

摘　要: 用极大似然法估计一元 $p$-范分布参数 $\sigma$。在 $\mu$、$p$ 已知的条件下, 得出 $\hat{\sigma}^p$ 是 $\sigma^p$ 的无偏估计及 $\frac{n}{p\lambda^p}\cdot\frac{\hat{\sigma}^p}{\sigma^p}$ 服从 $\chi^p$ 分布, 进而给出方差的假设检验方法。

关键词: p-范分布; 无偏估计; $\chi^p$ 分布; 假设检验
中图法分类号: P207

在测量数据处理中, 当观测误差的分布为单峰、对称时, 可以设观测误差服从 $p$-范分布, 适当选择 $p$ 的值, 可使其比正态分布更接近于误差的真实分布[1]。文献[1]给出了 $p$-范分布参数的估计方程组, 但未给出参数估值的具体表达式及估计量服从的分布。本文在特定条件下, 得出了 $\hat{\sigma}$ 的具体表达式, 同时研究了 $\hat{\sigma}^p$ 的分布及其无偏性。

## 1　$p$-范分布参数 $\sigma$ 的极大似然估计

假设已知 $\mu$、$p$, 用极大似然法估计 $\sigma$, 不妨设 $\mu=0$(否则以 $\mu - E\mu$ 代替 $\mu$), 则一元 $p$-范分布的密度函数为:

$$f(x) = \frac{p\lambda}{2\sigma\Gamma(\frac{1}{p})}\exp(-\frac{\lambda}{\sigma}|x|)^p \tag{1}$$

式中, $\lambda=\sqrt{\Gamma(\frac{3}{p})\big/\Gamma(\frac{1}{p})}$, $p>0$, $\sigma>0$。设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是取自 $p$-范分布的一个子样, 则其似然函数为:

$$L(\sigma; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{p^n\lambda^n}{2^n\sigma^n\Gamma^n(\frac{1}{p})}\exp\{-(\frac{\lambda}{\sigma})^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\} \tag{2}$$

式(2)两边取对数得:

$$\ln L(\sigma; x_1, x_2, \cdots, x_n) = n\ln\frac{p\lambda}{2\Gamma(\frac{1}{p})} - n\ln\sigma - (\frac{\lambda}{\sigma})^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \tag{3}$$

将式(3)对 $\sigma$ 求导, 并令之为 0, 得:

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{p}{\hat{\sigma}}(\frac{\lambda}{\hat{\sigma}})^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p = 0$$

即

$$\hat{\sigma}^p = \frac{p\lambda^p}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \tag{4}$$

或

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{p\lambda^p}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\quad A^p \tag{5}$$

## 2　$\hat{\sigma}^p$ 的数学期望与方差

数学期望和方差是描述分布统计特性最常用的两个数字特征, 也是评价估计量优劣的指标。下面计算 $\hat{\sigma}^p$ 的数学期望与方差。

$$E|x|^p = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^p f(x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{p\lambda}{2\sigma\Gamma(\frac{1}{p})}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p \mathrm{e}^{-(\frac{\lambda}{\sigma}|x|)^p}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{p\lambda}{\sigma\Gamma(\frac{1}{p})}\int_{0}^{\infty}x^p\mathrm{e}^{-(\frac{\lambda}{\sigma}x)^p}\mathrm{d}x \tag{6}$$

令 $y=(\frac{\lambda}{\sigma}x)^p$, 则 $x=\frac{\sigma}{\lambda}y^{\frac{1}{p}}$, $\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{p\lambda}y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y$, 于是式(6)成为:

$$E|x|^p = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{p})}(\frac{\sigma}{\lambda})^p\int_{0}^{\infty}y^{\frac{1}{p}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y =$$

收稿日期: 2002-04-08。
项目来源: 教育部高等学校骨干教师资助项目(200005); 国家测绘局测绘科技发展基金资助项目(20010103); 湖北省教育厅重大课题资助项目(2001Z06003)。

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{p})}(\frac{\sigma}{\lambda})^p\,\Gamma(\frac{1}{p}+1)=\frac{1}{p}(\frac{\sigma}{\lambda})^p \tag{7}$$

由式(4)、式(7)知:

$$E(\sigma^p)=\frac{p\lambda^p}{n}\sum_{i=1}^{n}E\mid x_i\mid^p=$$

$$\frac{p\lambda^p}{n}n\,\frac{1}{p}(\frac{\sigma}{\lambda})^p=\sigma^p \tag{8}$$

即 $\sigma^p$ 是 $\sigma^p$ 的无偏估计。

当 $p=2$ 时, $\sigma^2$ 是 $\sigma^2$ 的无偏估计, 这正是正态分布的方差估计。又因为:

$$E\mid x\mid^{2p}=\int_{-\infty}^{\infty}\mid x\mid^{2p}f(x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{p\lambda}{\sigma\Gamma(\frac{1}{p})}\frac{\sigma}{p\lambda}(\frac{\sigma}{\lambda})^{2p}\,\Gamma(\frac{1}{p}+2)=$$

$$\frac{p+1}{p^2}(\frac{\sigma}{\lambda})^{2p} \tag{9}$$

所以,

$$D\mid x\mid^p=E\mid x\mid^{2p}-(E\mid x\mid^p)^2=\frac{1}{p}(\frac{\sigma}{\lambda})^{2p} \tag{10}$$

显然, $\mid x_i\mid^p\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 相互独立, 故由式(4)、式(10)得:

$$D(\sigma^p)=(\frac{p\lambda^p}{n})^2\sum_{i=1}^{n}D\mid x_i\mid^p=\frac{p}{n}\sigma^{2p}$$

## 3 $\frac{n}{p\lambda^p}\cdot\frac{\sigma^p}{\sigma^p}$服从 $\chi^p$ 分布

令 $y_i=\frac{x_i}{\sigma}$, 则 $E(y_i)=\frac{1}{\sigma}E(x_i)=0$, $D(y_i)=\frac{1}{\sigma^2}D(x_i)=1$, 于是 $y_i$ 服从 $\mu=0$, $\sigma^2=1$ 的 $p$-范分布。顾及式(4), 得:

$$\frac{n}{p\lambda^p}\frac{\sigma^p}{\sigma^p}=\frac{n}{p\lambda^p}\frac{1}{\sigma^p}\frac{p\lambda^p}{n}\sum_{i=1}^{n}\mid x_i\mid^p=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\sigma}\right|^p$$

显然 $y_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 相互独立, 故 $\frac{n}{p\lambda^p}\cdot\frac{\sigma^p}{\sigma^p}$ 服从 $\chi^p$ 分布[1], 其密度函数为:

$$\chi^p(y)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{\Gamma(\frac{n}{p})}y^{\frac{n}{p}-1}\mathrm{e}^{-\lambda^p y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

## 4 $\chi^p$ 检验

利用上述结论可以讨论有关方差假设的显著性检验问题。设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是取自 $p$-范分布的一个子样, 且 $E(x)=\mu=0$, $D(x)=\sigma^2$(未知), 要求检验假设 $H'_0$: $\sigma^2=\sigma_0^2$。将 $H_0$ 转化为 $H'_0$: $\sigma^p=\sigma_0^p$。显然 $H_0$ 与 $H'_0$ 等价。取统计量 $T=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mid x_i\mid^p}{\sigma^p}$。因 $\sigma^p$ 是 $\sigma^p$ 的无偏估计, 故在 $H'_0$ 为真时, $\frac{p\lambda^p}{n}T$ 应在 1 附近摆动, 于是对于给定的显著性水平 $\alpha$, 当 $H'_0$ 为真时存在实数 $k_1$ 和 $k_2$, 使

$$P_{H_0}=(k_1\leqslant T\leqslant k_2)=1-\alpha$$

其拒绝域为$\{T<k_1\}\cup\{T>k_2\}$, 且

$$P(T<k_1)=\alpha_1$$

$$P(T>k_2)=\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha$$

因为 $T$ 服从 $\chi^p$ 分布, 故 $k_1=\chi^p_{\alpha_1}(n)$, $k_2=\chi^p_{1-\alpha_1}(n)$, 其拒绝域为:

$$C=\{T<\chi^p_{\alpha_1}(n)\}\cup\{T>\chi^p_{1-\alpha_1}(n)\}$$

当统计量 $T\in C$ 时, 拒绝原假设 $H'_0$, 从而拒绝 $H_0$, 否则接受 $H_0$。

1) 一般地说, $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的选取应尽可能减小犯第二类错误的概率。但实际上由于计算最优的 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 很复杂, 往往取 $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$。

2) 对于 $\chi^p$ 分布的随机变量, 通常取单侧检验, 即令 $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha$。检验方法类似。

## 参 考 文 献


1 孙海燕. $p$-范分布理论及其在测量数据处理中的应用:[博士论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1995

2 魏宗舒. 概率论与数理统计教程. 北京: 高等教育出版社, 1983


作者简介: 胡宏昌, 讲师, 博士生。现从事测量数据处理理论与应用研究。

# Parameter $\sigma$ Estimation of $p$-norm Distribution

*HU Hongchang*[1]　*SUN Haiyan*[1]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

**Abstract**: In surveying data processing, when the distribution of observational errors is symmetry and has only one peak value, we may assume that it is $p$-norm distribution. By choosing a specific value of $p$, the $p$-norm distribution can be closer to the real distribution of the errors than a normal one. Equations about parameters of $p$-norm distribution could not be directly solved using average method, so the estimations of the parameters could not be obtained directly. In this paper, we try to discuss them under the conditions that the values of the parameter $\mu$ and $p$ are known. The following results are derived.

First, the estimator of parameter $\sigma$ is given by the method of maximum likelihood. Second, because the expectancy and variance are very important to depict the statistical property of a random variance, we give the calculating formulas of the expectancy and variance of estimator $\hat{\sigma}^p$, and prove that $\hat{\sigma}^p$ is a unbiased estimator. Third, we derive that the estimate of $\frac{n}{p\lambda^p}\frac{\hat{\sigma}^p}{\sigma^p}$ is $\chi^p$ distributed. Lastly, by using the above results, hypothesis testing about $\hat{\sigma}^p$ is discussed. The testing method of hypothesis to the variance is concluded when the hypothetical universe is a $p$-norm distribution.

**Key words**: $p$-norm distribution; unbiased estimation; $\chi^p$ distribution

---

**About the author**: HU Hongchang, lecturer, Ph. D candidate. He is mainly engaged in the research on the theory and application of surveying data processing.