

三旋转自由度激光经纬仪的扫描数学模型

冯文灏¹ 李欣¹ 樊启斌²

(1 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学数学与统计学院, 武汉市珞珈山, 430072)

摘要: 首先给出二旋转自由度激光经纬仪的铅垂面扫描方程和圆锥面扫描方程的推演结果, 然后着重推演三旋转自由度激光经纬仪的扫描方程, 其中包括绕竖轴(主轴)旋转生成的单叶双曲面扫描方程、绕横轴(副轴)旋转的单叶双曲面扫描方程以及绕视准轴(第三轴)旋转的给定方位的平面扫描方程。

关键词: 激光经纬仪; 旋转自由度; 扫描; 模型; 单叶双曲面; 结构光; 工业测量

中图法分类号: P234.1; TB2

大型工业测量的目标^[1]主要包括室内外大型机械、铁路隧道、地下指挥所、地下油库、弹药库、水下舰艇洞库、飞机洞库、坝体内的其它结构、各类大型水油气管道、舰船、飞机或其他飞行体内结构、装载矿石、油类或气体的仓罐以至窑室、洞岩体、亭台楼阁的内结构等。这些工业目标的测量环境主要有待测点上不能立尺置镜, 目标缺乏纹理或无纹理, 施测空间大多狭窄, 施测环境大多照度不佳等特点, 常需要测制目标的各类剖面, 有时需要颇高的测量精度, 基于无反射目标测距技术的测量精度也许不能满足要求, 可能受机械、烟尘、毒物和有害气体等因素的干扰。常规工程测量方法工效很低, 有时还无法实施。相比较地, 结构光测量的一些重要特性, 恰恰适合于这些人工构筑物和机械设备等主要工业目标的测量环境及要求。

已知空间方向的投影光线的集合称为结构光^[1]。生成结构光的设备可以是将光点、光缝、光栅、格网或斑纹投影到被测物体上的某种投影设备或仪器, 也可以是生成激光束的激光器。利用结构光设备在被测物体上生成“标志”, 使其可以观测、摄影、摄像或跟踪, 以解决工业目标上被测点不能“立尺”和“置镜”的问题。同时, 结构光自身是测角前方交会的一个方向, 也是摄影测量空间前方交会的一个方向。所以, 可以使用单架角度测量仪器或单架摄影机与之构成空间前方交

会, 以简化作业方案。此外, 结构光工业测量还有一些特殊的优点: 仅需要较小的施测空间; 生成人工纹理的功能, 正好需要较小的环境照度; 特别适宜于剖面测量; 能提供相当高的精度; 具备向半自动化和自动化发展的巨大潜力(例如, 装配在火车箱上的、用以生成光横截面的光缝发光设备以及高速摄像设备, 可快速获取隧道现状)。

瑞士徕卡公司 2000 年推出的 4000 型断面仪能提供大约 $\pm 5\text{mm}$ 的测点精度, 适用于低精度的断面测量需求。但它不能应用于高精度测量, 如大型机械外形测量、大型运输工具的内结构测量、油船和油罐的容积测量等, 并且价格昂贵, 二次开发能力薄弱以及存在测量死角等缺陷。

基于三旋转自由度激光经纬仪的结构光工业测量方法, 属积木式, 可用现有仪器组装, 自行编制软件, 且成本低廉。此外, 本方法的精度立足于“前方交会”, 使用 $2''$ 级测角仪器, 当交会边长 $a \approx b \approx 20\text{m}$ 时, 点位交会精度可保证在 $\pm 1\text{mm}$ 以内。另外, 无扫描死角, 适合于不同位置和方位目标的直接的断面测量也是本测量方法的优点。

1 基于二旋转自由度激光经纬仪的结构光扫描数学模型

1.1 铅垂面扫描方程

如图 1 所示, 首先选定一右手物方空间坐标系

D - XYZ , 确定以激光经纬仪横竖轴交点 L 为原点的坐标系 L - XYZ , 安置某水平角后, 使激光视准轴绕横轴旋转(即变动天顶距 V), 激光点扫描后生成过点 L 的给定方位的铅垂面 S 。在 L - XYZ 内, 此铅垂面的表达式为:

$$S(X, Y, Z, H) = X - (\tan H)Y \quad (1)$$

以单台电子经纬仪观测此铅垂面上的任意点, 即可测知其空间坐标。

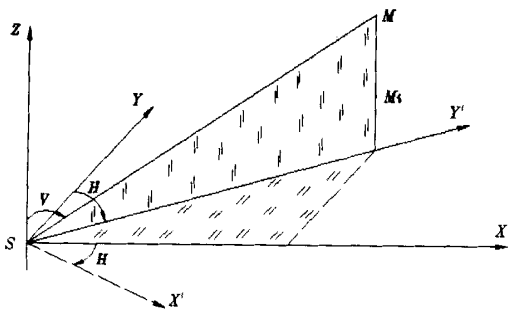


图1 铅垂面扫描

Fig. 1 Scanning Equation of Plumb Plane

1.2 圆锥面扫描方程

安置某天顶距 V 后, 使视准轴绕竖轴旋转, 即变动水平角 H , 可生成圆锥面扫描方式, 如图2所示。

在坐标点 L - XYZ , 此圆锥面 P 表示为:

$$S(X, Y, Z, H) = X^2 + Y^2 - (\tan V)^2 Z^2 \quad (2)$$

而当 $V=0^\circ$ 时, 扫描面为铅垂直线; 当 $V=90^\circ$ 时, 扫描面为一水平平面; 当 $V > 90^\circ$ 时, 扫描面为一倒立的圆锥面。

这两种扫描方式简单明了, 可自由使用, 但有近 90° 的扫描死角, 不能对特殊位置和任意方位的目标直接进行断面扫描。

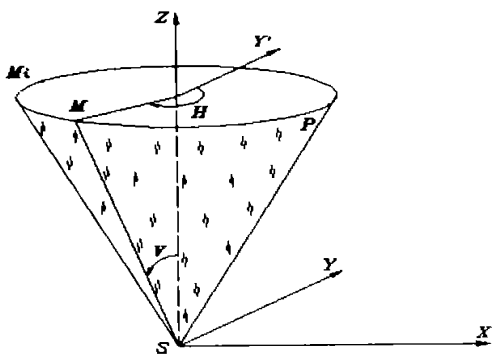


图2 圆锥面扫描

Fig. 2 Scanning Equation of Circular Cone

2 基于三旋转自由度的激光经纬仪的结构光扫描数学模型

三旋转自由度的激光经纬仪, 除了具有绕竖轴(主轴)、横轴(副轴)进行扫描的功能外, 还具备绕第三轴(视准轴)实施旋转的功能。从而形成任意方位的平面扫描方程、绕竖轴旋转的单叶双曲面扫描方程以及绕横轴旋转的单叶双曲面扫描方程。

三旋转自由度激光经纬仪无扫描死角, 能对特殊位置的目标进行扫描, 能对任意方位的目标扫描并直接获取其断面。

2.1 绕视准轴旋转生成给定方位的平面扫描方程

设定水平角 H 与天顶距 V 后, 绕视准轴(第三轴)旋转 κ 角, 实现给定方位的平面扫描。扫描面是过点 M 的球的切平面, 如图3所示。其平面的方位决定于角 H 与 V 。 R 是此平面距坐标系原点 L 的法线长度, R 值通过检校可以精密测定。

依法线式平面方程表达式:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - R = 0 \quad (3)$$

式中, α, β, γ 是法线 R ($R \geq 0$) 的方向角。

用经纬仪的角度 (H, V) 代替上式中的 (α, β, γ), 其中考虑到 $V = \gamma$, 有:

$$X \sin V \sin H + Y \cos V \cos H + Z \cos V - R = 0 \quad (4)$$

式(4)描述了在坐标系 L - XYZ 内空间给定方位的一个平面方程, 见图3。若 $V=90^\circ$, 则构成给定方向角 H 的铅垂面扫描方程式:

$$X \sin H + Y \cos H - R = 0 \quad (5)$$

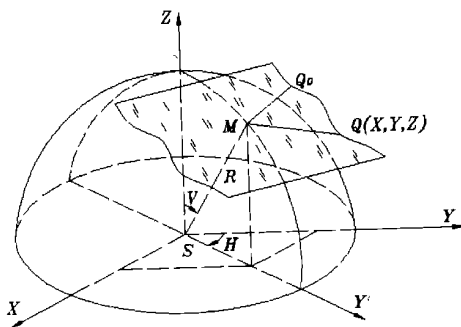


图3 平面扫描方程

Fig. 3 Scanning Equation of Plane for Given Orientation

若 $V=90^\circ$, 构成水平面扫描方程式, 相仿于“水准”的工作方式:

$$Z = R \quad (6)$$

若 $H=0^\circ$, 是一种特定方位平面的扫描方程式:

$$Y \sin V + Z \cos V - R = 0 \quad (7)$$

当 (H, V) 中有一个角度是 90° 的倍数时, 则构成与坐标系 $L-XYZ$ 某一个坐标平面相平行的扫描面。

2.2 绕竖轴旋转生成的单叶双曲面扫描方程

安置天顶距 V 和第三角 κ , 绕竖轴旋转生成单叶双曲面扫描及相应的扫描方程。此种单叶双曲面的对称轴 Z 是激光经纬仪的竖轴。在激光经纬仪坐标系 $L-XYZ$ (右手坐标系) 内, 如图 4 所示, 水平角 H 与天顶距 V 定义如常规测量。点 $Q(X, Y, Z)$ 是扫描线上一点, \vec{MQ} 相对起始方向 \vec{MA}_0 转折角 κ 。在坐标系 $L-XYZ$ 内现已知向量

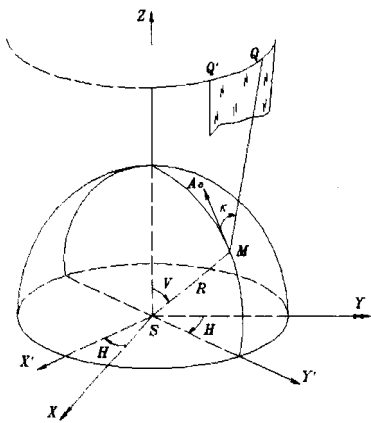


图 4 单叶曲面扫描方程 I 型

Fig. 4 Scanning Equation of Huperboloid of One Sheet, Type I

$\vec{LM} = \{R \sin V \cos H, R \sin V \sin H, R \cos V\}$, κ 角起始方向的单位向量 $\vec{MA}_0 = \{-\cos V \cos H, -\cos V \sin H, \sin V\}$, 以及物方点 Q 的向量 $\{X, Y, Z\}$, 故可从 $\triangle LMQ$ 中有向量 \vec{MQ} 的解为 $\{X - R \sin V \cos H, Y - R \sin V \sin H, Z - R \cos V\}$ 。又因向量 \vec{MQ} 与向量 \vec{LM} 互相垂直, 它们的数量积应为零:

$$\vec{MQ} \cdot \vec{LM} = (R \sin V \cos H)(X - R \sin V \cos H) + (R \sin V \sin H)(Y - R \sin V \sin H) + (R \cos V)(Z - R \cos V) = 0 \quad (8)$$

简化后有:

$$\sin V(X \cos H + Y \sin H) + Z \cos V - R = 0 \quad (9)$$

向量 \vec{MA}_0 与向量 \vec{MQ} 间夹角为 κ , 故有:

$$\cos \kappa = \frac{\vec{MA}_0 \cdot \vec{MQ}}{|\vec{MA}_0| \cdot |\vec{MQ}|} = \frac{-\cos V(X \cos H + Y \sin H) + Z \cos V}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2 - 2R} \cdot \sqrt{[\sin V(X \cos H + Y \sin H) + Z \cos V]^2}} \quad (10)$$

将式(9)代入上式分母, 并简化有:

$$\cos \kappa = \frac{Z \csc V - R \cot V}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2}} \quad (11)$$

$$\text{或 } (X^2 + Y^2) \cos^2 \kappa + Z^2 (\cos^2 \kappa - \csc^2 V) + 2ZR \csc V \cot V = R^2 (\cos^2 \kappa + \cot^2 V) \quad (12)$$

$$\text{有: } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} - \frac{(Z-d)^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

式中,

$$\begin{cases} a^2 = \frac{R^2 \sin^2 \kappa}{\csc^2 V - \cos^2 \kappa} \\ c^2 = \frac{R^2 \sin^2 \kappa \cos^2 \kappa}{(\csc^2 V - \cos^2 \kappa)^2} \\ d = \frac{R \csc V \cot V}{\csc^2 V - \cos^2 \kappa} \end{cases} \quad (14)$$

因而证明, 当 $V \neq 90^\circ, \kappa \neq 0^\circ$ 时, 式(12)代表一单叶双曲面, 其实长轴长与实短轴长均为 $2a$ 。激光线 \vec{MQ} 是此单叶双曲面的母线。任何平行于 Z 轴的平面(任何铅垂面), 与此单叶双曲面的交线均为双曲线。此种扫描方式有几种特例。

特例 1 圆锥面扫描方程式。

当 $V \neq 90^\circ, \kappa = 0^\circ$ 时, 式(13)中的 $(Z-d)$ 化简为:

$$Z - d = Z - R \cos V \quad (15)$$

故式(12)可简化作:

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \cot^2 V + 2ZR \csc^2 V \cot V = R^2 \csc^2 V \quad (16)$$

再简化后有:

$$X^2 + Y^2 - (Z \cot V - R \cos V \cot V)^2 = 0 \quad (17)$$

设 $Z' = Z \cot V - R \cos V \cot V$, 有圆锥面扫描方程如下:

$$X^2 + Y^2 - (Z')^2 = 0 \quad (18)$$

式中, Z' 是坐标 Z 及天顶距安置角的函数。

特例 2 圆柱面扫描方程式。

当 $\kappa = 0^\circ, V = 90^\circ$ 时, 由式(11)有圆柱面扫描方程:

$$X^2 + Y^2 - R^2 = 0 \quad (19)$$

2.3 绕横轴旋转的单叶双曲面扫描方程

绕横轴旋转进行扫描可生成另一种单叶双曲

面扫描数学模型。

在激光经纬仪坐标系 $L-XYZ$ 内,如图 5 所示,现有安置角水平角 H 和第三转角 κ ,以及扫描线 \vec{MQ} 的物方点 $Q(X, Y, Z)$ 。方向线 \vec{MQ} 相对于起始方向 \vec{MA} 折转 κ 角。

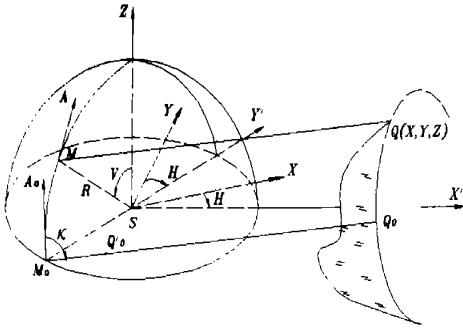


图 5 单叶双曲面扫描方程 II 型

Fig. 5 Scanning Equation of Hyperboloid of One Sheet, Type II

在坐标系 $L-X'Y'Z$ 内,现已知 \vec{LM}_0 方向的单位向量为 $\{0, -1, 0\}$, 单位向量 $\vec{M}_0A_0 = \{0, 0, 1\}$ 以及 \vec{M}_0Q_0 方向的单位向量 $\vec{M}_0Q'_0 = \{\sin\kappa, 0, \cos\kappa\}$, 且有已知点 $M_0(0, -R, 0)$ 。这时有直线 $\vec{M}_0Q'_0$ 的方程为:

$$\begin{cases} \frac{X'}{\sin\kappa} = \frac{Z}{\cos\kappa} \\ Y' = -R \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{或} \quad Z^2 + Y'^2 = R^2 + X'^2 \cot^2 \kappa \quad (21)$$

$$\text{或} \quad \frac{(X')^2}{R^2} + \frac{Z^2}{R^2} - \frac{(X')^2}{R^2 \tan^2 \kappa} = 1 \quad (22)$$

这是典型的单叶双曲方程式。此单叶双曲面是绕副轴 X' 旋转扫描所生成,其对称轴(虚轴)为 X' 轴。此对称轴 X' 的方向,取决于角度值 H ,而“张开角”则取决于角度值 κ 。实长轴长与实短轴相等(均为 R),虚轴半径为 $R \tan \kappa$ 。依此式得坐标 Z 及坐标值 (X', Y') 后,可依坐标二维变换式求得待定点在激光经纬仪坐标系 $L-XYZ$ 内的坐标 (X, Y) :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos H & -\sin H \\ \sin H & \cos H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \quad (23)$$

当 $H=0^\circ, \kappa=0^\circ$ 时,扫描面为 $X=0$ 的平面;当 $H=0^\circ, \kappa=90^\circ$ 时,扫描面为圆柱面,方程式为 $Y^2 + Z^2 = R^2$;当 $H=90^\circ, \kappa=0^\circ$ 时,扫描面为 $Y=0$ 的平面;当 $H=90^\circ, \kappa=90^\circ$ 时,扫描面为圆柱面,方程式为 $X^2 + Z^2 = R^2$ 。

3 结 语

1) 三维测量,包括测角三维测量和三维摄影测量,以双向前方交会为基本原理。所以,本文所提及的各种扫描面,作为已知空间方向集合的结构光,提供了双向前方交会的一个方向。

2) 结构光中任意一根光线在给定物方空间坐标系内的方向为已知,因此只需一台测角仪器即可与它构成前方交会解算未知点三维空间坐标。以一台以上测角仪器,与它解算三维坐标,可提高可靠性。同样,也只需一台已知内外方位元素的摄像机,即可与之构成前方交会。其中,摄像机用以捕捉并获取某激光点的像点坐标。

3) 结构光是已知空间方向线的集合,上述任意一种扫描面上所有激光线的空间方向均已知。因此,可以用一台摄像机将所有激光点记录在同一影像上,并且在能鉴别各激光点的结构光方向时,可计算全体激光点的物方空间坐标。

4) 本文所提供的数学模型,也可作为某种激光扫描系统 LSS (laser scanning system) 的设计模型。这种系统,以回避扫描死角、具有全方位的扫描空间以及具有“线扫描”和“圆扫描”等多种扫描方式为特点。

参 考 文 献

- 冯文灏. 工业测量方法及其选用基本原则. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(4): 331~336
- 冯文灏. 试论封闭构筑物测量, 测绘学报, 1996, 25(2): 156~160
- 冯文灏, 樊启斌, 李欣. 基于激光经纬仪的结构光摄影测量原理探讨. 测绘学报, 1995, 24(1): 71~76
- 冯文灏, 覃好锐, 陈雨常, 等. TSS-1 型隧道工程测量系统研制报告. 铁道航测, 1996(2)
- 冯文灏, 李欣. 基于三旋转自由度激光经纬仪的结构光工程测量原理与应用. 武汉测绘科技大学学报, 1998, 23(4): 345~350
- 冯文灏, 李欣, 白峰, 等. 光成截面摄影测量与应用. 武汉测绘科技大学学报, 1992, 17(4): 48~56

作者简介: 冯文灏, 教授, 博士生导师。现主要从事近景摄影测量与特殊精密工业测量技术研究。代表成果: 立体视觉系统检校中引入制约条件的推演; 基于三旋转自由度激光经纬仪的结构光工业测量原理和工业测量中特高精度控制网的建立方法等。已发表论文 90 余篇。

E-mail: w hfeng@wtusm.edu.cn

The Scanning Mathematical Models of a Laser-theodolite with Three Freedoms of Rotation

FENG Wenhao¹ LI Xin¹ FAN Qibin²

(1 School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China 430079)

(2 School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Luojia Hill, Wuhan, China 430072)

Abstract: The structured light industrial surveying with high accuracy (e. g. $\pm 1\text{mm}$) based on laser theodolite with three freedoms of rotation is particularly applicable for texture-lacking objects, such as capacity of oil tanker, external form of airplane and ship etc. As we know that certain instrument (such as Leica Profiler 4000) can not be used for this kind of objects, because its standard error ($\pm 5\text{mm}$, even more) does not satisfy the accuracy requirement. In this paper the scanning equation of plumb plane and the scanning equation of circular cone are firstly deduced when the laser theodolite with two freedoms of rotation is used. Then some scanning equations are briefly deduced when the instrument with three freedoms of rotation is used. These equations include the scanning equation of hyperboloid of one sheet generated by rotating around the vertical axis (host axis), the scanning equation of hyperboloid of one sheet generated by rotating around the horizontal axis (countershaft axis), and the scanning equation of plane for given orientation generated by rotating around the third axis. According to these planes and surfaces of known position and orientation in space, the space coordinates of unknown points could be determinates, and just one angle-measured instrument (or one CCD camera) is needed. The accuracy obtained by using this system (through the intersection) is much better than the accuracy by using the total station without reflector, (such as TCR, Leica). Furthermore, the system consists of a laser-theodolite, an angle-measured instrument and a portable computer, so it belongs to “toy bricks type” and it is quite cheap. It is also emphasized that the mathematical models in this paper could be used as designing model of certain laser scanning system.

Key words: laser theodolite; freedoms of rotation; scanning; model; hyperboloid of one sheet; structured light; industrial surveying

About the author: FENG Wenhao, professor, Ph.D supervisor. His chief research aspects involve technique of close-range photogrammetry and special industrial surveying. His typical achievements include an investigation into the theory and applications of structured-light industrial surveying system based on laser theodolite with three freedom of rotation; deduction of constraints conditions in the calibration of stereo-vision, etc. He has published over 90 papers.

E-mail: whfeng@wtusm.edu.cn