DOI :10.13203/j.whugis2001.06.013
第 26 卷 第 6 期　　武 汉 大 学 学 报 · 信 息 科 学 版　　Vol. 26 No. 6
2001 年 12 月　　Geomatics and Information Science of Wuhan University　　Dec. 2001

文章编号: 1000-050X(2001)06-0533-06　　文献标识码: A

海洋测线网系统误差调整的秩亏网平差模型

刘雁春[1]　李明叁[1]　黄谟涛[2]

(1　海军大连舰艇学院海洋测绘系, 大连市解放路 667 号, 116018)
(2　天津海洋测绘研究所, 天津市友谊路 40 号, 300061)

摘　要: 提出了以测线为单位的测线网误差结构模型, 发现和揭示了海洋测线网平差的秩亏特性, 在此基础上, 导出了海洋测线网系统误差处理的统一秩亏网平差模型, 为测线网数据处理提供了实施方法, 并从理论上证明了目前常用的半系统误差调整方式仅是本文秩亏网模型的特例。实例计算表明, 该秩亏网平差模型具有更广泛的实用性。

关键词: 海洋测线网; 系统误差调整; 秩亏网平差模型
中图法分类号: P229.2; P207

海洋水深测量、海洋重力测量及海洋磁力测量大多以布设测线的形式施测。将测线布设成主测线和副测线, 主副测线直交(或斜交)得到交叉点, 并构成测线网。测线网交叉点测量差值往往是海洋测量惟一可用来分析观测质量的信息。目前, 常用交叉点差值来检验数据质量[1~3], 而能否利用交叉点差值来提高观测数据的精度、改善数据质量的研究较少。在海洋重力测量数据处理中, 对海洋重力测量半系统误差调整方法[4]做了初步尝试。但这种方法仅从统计角度出发, 提出对海洋重力测线网数据进行调整, 理论上尚未完善。对于具有测线网模式的海洋水深测量和海洋磁力测量, 至今未建立相应的数据处理理论和方法。

1　测线网误差模型及其平差秩亏特性

1.1　基本误差模型

若测量某海区有 m 条主测线和 n 条副测线, 据测量要求, 具有 $m\times n$(记为 mn)个交叉点。在交点处, 主测线和副测线的测量值分别为 $\boldsymbol{D}$、$\tilde{\boldsymbol{D}}$ 以及交叉点差值 Δ 矩阵分别为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ D_{m1} & \cdots & D_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \cdots & \tilde{D}_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \tilde{D}_{m1} & \cdots & \tilde{D}_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\Delta=\boldsymbol{D}-\tilde{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \Delta_{m1} & \cdots & \Delta_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{1}$$

式中, D_{ij}, $\tilde{D}_{ij}$ 为第 i 条主测线和第 j 条副测线在交叉点处的测量值, 且 $\Delta_{ij}=D_{ij}-\tilde{D}_{ij}$。

如果测量值不存在任何误差, 则应有 $\Delta=0$, 即为零矩阵。一般由于误差的影响, $\Delta\neq0$。引入误差模型:

$$\begin{cases} D_{ij}=d_{ij}+a_0+a_i+\delta_{ij} & \text{主测线} \\ \tilde{D}_{ij}=d_{ij}+b_0+b_i+\tilde{\delta}_{ij} & \text{副测线} \end{cases}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

式中, d_{ij} 为主测线和副测线在交叉点处的测量真值; a_0, a_i, b_0, b_j 为系统误差, a_0 作用于整个主测线, a_i 仅作用于第 i 条主测线, b_0 作用于整个副测线, b_j 仅作用于第 j 条副测线, 它们是各种误差在测线上的综合体现; δ_{ij}, $\tilde{\delta}_{ij}$ 为交叉点处的偶然误差。偶然误差受作业环境的影响, 本文假设主测线和副测线的作业环境相同, 则认为 δ_{ij}, $\tilde{\delta}_{ij}$ 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$。主测线和副测线的交点处差值为:

$$\Delta_{ij}=D_{ij}-\tilde{D}_{ij}=(a_0-b_0)+(a_i-b_j)+(\delta_{ij}-\tilde{\delta}_{ij}) \tag{3}$$

收稿日期: 2001-09-20。
项目来源: 国家自然科学基金资助项目(40071070)。

令 $c_0 = a_0 - b_0$, $\xi_{ij} = \delta_j - \tilde{\delta}_j$, 则差值 Δ_{ij} 可表示为 $\Delta_{ij} = c_0 + a_i - b_j + \xi_{ij}$, 其矩阵形式为:

$$\Delta = \boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \xi \tag{4}$$

式中,

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{C}_0} = \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_0 \\ \cdots & & \cdots \\ c_0 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \cdots & & \cdots \\ a_m & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_1 \\ \cdots & & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}, \underset{m\times n}{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \xi_{m1} & \cdots & \xi_{mn} \end{bmatrix}$$

且记:

$$\underset{m\times n}{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mn} \end{bmatrix}, \underset{m\times n}{\tilde{\delta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{11} & \cdots & \tilde{\delta}_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \tilde{\delta}_{m1} & \cdots & \tilde{\delta}_{mn} \end{bmatrix}$$

采用式(3), 则该误差模型具有 $m + n + 2$ 个参数, 采用式(4)则有 $m + n + 1$ 个参数。只要确定 a_0、b_0(或 c_0)、a_i、b_j, 就可对测值调整系统误差, 消除系统性影响。

1.2 测线网误差模型的平差秩亏特性

由于实际海洋测量中, 只能得到交叉点差值作为检核数据, 相当于对交叉点进行二次观测。据平差理论知, 对某一物理量多次观测可确定该物理量估值, 但不能获得该物理量的两个估值。因此, 对于误差模型(3)、(4), 仅采用交叉点上的差值确定 2 个未知量(a_i, b_j)或 3 个未知量(a_i, b_j, c_0), 显然缺乏必要的数据。这相当于水准网的观测情形, 只获得高差(对应于交叉点处的差值), 要求出水准网中的高程(对应于测线网测线系统误差 a_i、b_j), 还需要必要高程数据(对应于这里的某个 a_i), 除非具有某点的高程, 才能算出其他点的高程(对应于测线网其他 a_i, b_j)。因此, 根据误差模型(3)、(4), 要算出测线系统误差和测线测区整体性影响, 还需要一些其他信息。但是海上作业环境无法提供更多的信息, 所以, 以测线为单位测线网误差模型是缺乏必要基准的。本文称模型(3)、(4)缺乏必要起算数据的性质为海洋测线网平差的秩亏特性(对应后面建立的模型)。

2 测线网秩亏网平差模型及数据调整方法

2.1 模型推导

结合误差模型(4), 视交叉点处偶然误差 δ_j、$\tilde{\delta}_j$ 相互独立且服从同一个正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 则 ξ_{ij} 服从 $N(0, 2\sigma^2)$。令差值 Δ_{ij} 为观测值, 用 L_{ij} 代替, 用 $\boldsymbol{V}$ 代替偶然误差 ξ。式(4)表示为误差方程式为:

$$\boldsymbol{V}_{m\times n} = \boldsymbol{C}_{0\,m\times n} + \boldsymbol{A}_{m\times n} - \boldsymbol{B}_{m\times n} - \boldsymbol{L}_{m\times n} \tag{5}$$

式中,

$$\boldsymbol{V}_{m\times n} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

为了方便表述, 引入以下符号:

$$\boldsymbol{E}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)_{1\times m}$$

$$\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)_{1\times n}$$

$$\eta_1^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1\times m}, \quad \eta_2^{\mathrm{T}} = [0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0]_{1\times m}$$

$$\eta_i^{\mathrm{T}} = [0 \; 0 \cdots 0 \; \overset{i}{1} \; 0 \quad \cdots \quad 0]_{1\times m}$$

则有: $$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m = \boldsymbol{e}_m$$

$$\eta_1\eta_1^{\mathrm{T}} + \eta_2\eta_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \eta_m\eta_m^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_m$$

令 $$\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)_{1\times m}$$

$$\boldsymbol{x}_b^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)_{1\times m}$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = (c_1, \boldsymbol{x}_a^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_a^{\mathrm{T}})_{1\times(m+n+1)}$$

为了得到常用形式 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}$, 对式(5)中的矩阵进行按行拉直运算后, 得到:

$$\boldsymbol{V}_{mn\times 1} = \boldsymbol{C}_{mn\times(m+n+1)}\boldsymbol{X}_{(m+n+1)\times 1} - \boldsymbol{L}_{mn\times 1} \tag{6}$$

式中, $$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{e}_n\eta_1^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{e}_n\eta_2^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{E}_n \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{e}_n\eta_m^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}_{mn\times(m+n+1)}$$

由最小二乘原理 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \min$, 得:

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta \tag{7}$$

式中,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} mn & n\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & -m\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \\ n\boldsymbol{e}_m & n\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \\ -m\boldsymbol{e}_n & -\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}_{mn\times(m+n+1)}$$

可以证明, 法矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为奇异矩阵, $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的秩为 $m + n + 1$, 法矩阵秩亏数为 2。

根据秩亏网平差原理[5,6], 可采用多种解法。本文采用附加约束法求解, 加入约束方程($\boldsymbol{G}$ 的秩为 2):

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = 0 \tag{8}$$

根据秩亏平差原理, 约束方程体现平差基准, 基准选择体现参数的范数最小约束。根据式(2)系统

误差分类, 海洋测线网的平差基准通常采用以下4种方法:

1) $G_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -e_m^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n}\\ 0 & e_m^{\mathrm{T}} & e_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 体现所有系统参数范数最小: $X^{\mathrm{T}}X=X_c^{\mathrm{T}}X_c+X_a^{\mathrm{T}}X_a+X_b^{\mathrm{T}}X_b=\min$, 等价于:

$$\hat{c}_0=\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i、\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i+\sum_{i=1}^{n}\hat{b}_j=0 \tag{9}$$

2) $G_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -e_m^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n}\\ 0 & e_m^{\mathrm{T}} & e_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 体现主副测线系统参数范数最小, 即 $X_a^{\mathrm{T}}X_a+X_b^{\mathrm{T}}X_b=\min$, 等价于:

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}\hat{b}_j=0 \tag{10}$$

3) $G_3^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -e_m^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n}\\ 0 & e_m^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n}\end{bmatrix}$, 体现测区及主测线系统参数范数最小, 即 $X_c^{\mathrm{T}}X_c+X_a^{\mathrm{T}}X_a=\min$, 等价于:

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i=0,\ \hat{c}_0=0 \tag{11}$$

4) $G_4^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0_{1\times m} & 0_{1\times n}\\ 0 & 0_{1\times m} & e_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 体现测区及副测线系统参数范数最小, 即 $X_c^{\mathrm{T}}X_c+X_b^{\mathrm{T}}X_b=\min$, 等价于:

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_j=0,\ \hat{c}_0=0 \tag{12}$$

综上所述, 测线网数据处理模型表示为:

$$\begin{cases}V=CX-L,\ P=E_{mn}\\ G^{\mathrm{T}}X=0\\ V^{\mathrm{T}}V=\min\end{cases} \tag{13}$$

为增强模型(13)的适用范围, 可采用加权秩亏网模型及计算公式[5]

$$\begin{cases}V=CX-L,\ P_L\\ G^{\mathrm{T}}P_XX=0\\ V^{\mathrm{T}}P_LV=\min\\ X=(N+P_XGG^{\mathrm{T}}P_X)^{-1}C^{\mathrm{T}}P_LL\\ Q_X=(N+P_XGG^{\mathrm{T}}P_X)^{-1}N(N+P_XGG^{\mathrm{T}}P_X)^{-1}\\ \hat{\sigma}_\xi^2=V^{\mathrm{T}}P_LV/[(m-1)(n-1)]\end{cases} \tag{14}$$

式(14)就是基于测线系统误差的测线网秩亏网平差模型。测线网系统误差模型的秩亏特性(秩亏数为2)为测线网数据处理带来困难。

对测线系统参数有必要进行显著性检验, 如果系统性影响明显, 则加以改正; 如果系统性影响不明显, 可视为偶然误差, 则不必改正。检验方法有对单个参数的 u、t 检验, 对多个参数的线性假设检验等。由于海洋测量采样数据的先验单位权中误差经常是未知的, 本文采用 t 检验、线性假设检验。

1) t 检验法。构造相应的统计量:

$$t=\frac{\hat{x}-0}{\sigma_{\hat{x}}}=\frac{\hat{x}}{\sigma_\xi\sqrt{q_{\hat{x}}}},\quad |t|\leqslant t_{\alpha/2} \tag{15}$$

2) 线性假设检验法。根据 Koch(1980)提出的线性假设检验法[6]:

$$\begin{cases}NX=C^{\mathrm{T}}L\\ G^{\mathrm{T}}X=0\\ HX=W_H\end{cases}$$

假设不存在系统误差, 则取 $W_H=0$, H 的取法依检验对象而定。对上式进行平差, 求得参数残差 $Q_1=V^{\mathrm{T}}PV$ 与模型(10)计算的 $Q=V^{\mathrm{T}}PV$ 之差 $R=Q_1-Q$。构造统计量为:

$$F=\frac{R/r(H)}{Q/(m+n-1)}\leqslant F_{(1-\alpha),\ r,\ (m+n-1)} \tag{16}$$

式中, r 为矩阵 H 的秩。

2.2 数据调整方法

由模型(14)解得测线系统误差参数 c_0、a_i、b_j 后, 可对整个测线网观测数据进行调整。调整方法如下:

1) 对整个测线影响参数 c_0 进行显著性检验。如果显著性不明显, 则视为偶然误差影响, 不予调整。如果显著性明显, 则应对整个测区的测线系统误差进行调整, 由 $c_0=a_0-b_0$。目前, 仅知道 c_0 尚无信息进一步确定 a_0、b_0。本文假设 a_0、b_0 仅由差值 c_0 引起, 取 $a_0=c_0/2$, $b_0=-c_0/2$。对所有主测线 a 和副测线 b 上的观测数据进行调整, 即

$$\begin{cases}D_1=D-C_0/2\\ D_1=D+C_0/2\end{cases}$$

式中, D、D 分别为主测线和副测线上所有观测数据。

2) 在 1) 调整后, 对 a_i、b_j 进行显著性检验。如果显著性明显, 则应对单个测线上所有观测数据进行系统误差调整, 即

$$\begin{cases}D_2=D_1-A\\ D_2=D_1-B\end{cases}$$

如果显著性不明显, 视为偶然误差影响, 仅对交叉点观测数据进行调整。

3) 经过 1)、2) 调整后, 根据模型(4), 改正后的数据(或差值)中仅含偶然误差影响, 为消除交叉点数据不同精度的情况, 仅对交叉点观测数据调整。因 $v_{ij}=\xi_{ij}$, 由于 δ_{ij}, δ_{ij}服从同分布且相互

独立，进一步调整 δ_j，$\tilde{\delta}_j$，认为 ξ_{ij} 由 δ_j 与 $\tilde{\delta}_j$ 引起，由 $\delta_j=\xi_{ij}/2$，$\tilde{\delta}_j=-\xi_{ij}/2$，则顾及矩阵形式，有：

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{D}_2-\delta\\ \boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{D}_2-\tilde{\delta}\end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_2$ 仅取经过 2）调整后主测线和副测线交叉点上的数据。

3 海洋重力测量中所用的测线半系统误差调整方法是其特例

由模型（4），假设 $\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}$ 意义同前，$\boldsymbol{S}=\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{e}_n}{mn}$，$\boldsymbol{S}_{i\circ}=\dfrac{\Delta_{i\circ}\boldsymbol{e}_n}{n}$，$i=1,\cdots,m$；$\boldsymbol{S}_{\circ j}=\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta_{\circ j}}{m}$，$j=1,\cdots,n$，即 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S}_{i\circ}$、$\boldsymbol{S}_{\circ j}$ 分别是交叉点差值的总平均、行平均和列平均。$i\circ$，$\circ j$ 表示矩阵的第 i 行向量和第 j 列向量。

假设交叉点差值为等精度独立，观测值向量为 $\boldsymbol{L}_{mn}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{L}_{1\circ}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{L}_{2\circ}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{L}_{m\circ}^{\mathrm{T}})$，且 $\boldsymbol{L}_{i\circ}^{\mathrm{T}}=(L_{i1},\Delta_{i2},\cdots,L_{in})$，则由式（7）的法方程为：

$$\begin{bmatrix} mm & n\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & -m\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\\ n\boldsymbol{e}_m & n\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\\ -m\boldsymbol{e}_n & -\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ x_a\\ x_b\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}_{1\circ}+\boldsymbol{L}_{2\circ}+\cdots+\boldsymbol{L}_{m\circ})\\ \eta_1\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{1\circ}+\eta_2\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{2\circ}+\cdots+\eta_m\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{m\circ}\\ -(\boldsymbol{L}_{1\circ}+\boldsymbol{L}_{2\circ}+\cdots+\boldsymbol{L}_{m\circ})\end{bmatrix}\quad(17)$$

顾及约束方程取 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n}\\ 0 & \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，并注意到 $\mathrm{L}_{ij}=\Delta_{ij}$，对应秩亏网平差解为：

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{e}_n}{mn}=\boldsymbol{S}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{ai}=\dfrac{\Delta_{i\circ}\boldsymbol{e}_n}{n}-\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{e}_n}{mn}=\boldsymbol{S}_{i\circ}-\boldsymbol{S},\ i=1,\cdots,m\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{bi}=\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta_{\circ j}}{m}-\dfrac{\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{e}_n}{mn}=\boldsymbol{S}_{\circ j}-\boldsymbol{S},\ j=1,\cdots,n\end{cases}\quad(18)$$

式(18)是文献[4]提出的半系统误差调整模型的结果。因为约束方程要求满足 $\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i=0$，$\sum_{j=1}^{n}\hat{b}_j=0$，即 $\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i=0$，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_j=0$，即满足测线半系统误差调整条件“$mnc_0$，$na_i$，$mb_j$ 远大于其他项”及“a_i，b_j 具有半系统误差”要求[4]。

上述证明表明，目前海洋重力测量中常用的测线半系统误差调整方法[4]是测线网秩亏平差模型的特例。但测线网秩亏模型在选择基准和顾及观测值权等方面具有较强的灵活性，在数据处理逻辑上也更加严密，因此，针对测线网数据处理，该模型具有更广泛的适用性。

4 实例分析

为了便于进行对照，本文采用文献[1,4,7]中实测数据进行计算，来说明本文模型的适用性，其实例说明半系统误差调整方法是测线秩亏网模型的特例。某海洋重力测区有 $m=12$ 条主测线和 $n=12$ 条副测线，交叉点测量差值调整前数据如表 1 所示。

表 1 交差点测量差值/ $10^{-5}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Tab. 1 The Difference Values at the Crossing Points/ $10^{-5}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

	副 1	副 2	副 3	副 4	副 5	副 6	副 7	副 8	副 9	副 10	副 11	副 12
主 1	−7.2	−14.7	−7.9	−7.7	0.5	−12.6	−2.2	−4.2	−0.7	−8.9	−2.0	−5.0
主 2	−3.0	−8.9	−2.9	−3.0	6.4	−7.7	2.4	0.1	4.2	−2.1	4.9	−2.8
主 3	−10.3	−18.2	−9.2	−9.5	−2.0	−11.8	−5.1	−5.0	−5.0	−10.9	−1.4	−6.6
主 4	−4.0	−10.0	−5.3	−5.9	4.1	−6.5	−0.7	0.4	1.9	−4.7	3.8	−1.2
主 5	2.3	−7.6	0.0	0.5	8.1	−3.2	5.8	3.1	4.0	−0.7	7.8	2.3
主 6	0.4	−9.6	−1.4	−2.3	6.3	−5.7	3.0	2.2	3.8	−2.9	5.9	2.2
主 7	−8.6	−14.9	−9.1	−7.9	−0.8	−11.7	−4.3	−4.3	−4.6	−10.5	0.4	−6.2
主 8	1.9	−4.9	1.0	−0.6	6.5	−2.9	7.9	5.2	8.4	0.1	9.0	4.4
主 9	6.4	−2.3	4.2	3.8	12.3	−0.6	8.5	8.1	9.3	4.1	11.4	7.1
主 10	−3.2	−9.3	−1.7	−2.4	7.2	−4.4	3.8	1.9	4.0	−2.5	5.0	1.1
主 11	4.4	−1.5	4.8	4.7	13.3	2.2	12.2	9.1	10.6	5.1	13.1	7.3
主 12	4.1	−4.7	3.4	3.0	9.7	0.5	9.0	5.1	8.8	1.8	11.3	5.9

采用本文秩亏网模型(14)，视交叉点差值独立等精度，参数先验权 $\boldsymbol{P_X}$ 取单位阵，约束方程中矩阵 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 分别取为 $\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{G}_3^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{G}_4^{\mathrm{T}}$，计算得到系统误差参数为表 2 和表 3。对应 $\hat{\sigma}_{\xi}=\sqrt{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P_L}\boldsymbol{V}/[(m-1)(n-1)]}=0.95\times10^{-5}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，$\hat{\sigma}_{\xi/2}=0.67\times10^{-5}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。

由以上计算结果可以看出, $\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{G}_3^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{G}_4^{\mathrm{T}}$ 大致相同, 但 $\boldsymbol{G}_3$ 计算得到副测线的系统误差参数比其他约束的相应结果大了 $0.1\times 10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。这表明, 选择不同的约束条件, 计算的系统误差参数不同, 尽管对交叉点本身改正没有影响, 但对系统误差的分配及测线系统误差的调整产生较大影响。因此, 在没有充分理由确信某系统参数存在时, 采用整体最小范数约束似乎是最好的选择。事实上, 如何选择约束条件应根据观测空间的结构、测量状态及误差性质决定。只有根据海洋测线网空间固有的特点, 选择合理的约束条件(即秩亏网的平差基准), 才能得到合理的系统误差参数, 获得准确的平差结果。

表 2　不同约束条件下测线系统误差参数/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Tab. 2　The Line Systematic Error Parameter Values from Different Constraint Conditions/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

序号	$\boldsymbol{G}_1$		$\boldsymbol{G}_2$		$\boldsymbol{G}_3$		$\boldsymbol{G}_4$	
	a	b	a	b	a	b	a	b
1	−5.95	1.30	−5.94	1.29	−5.94	1.40	−6.05	1.29
2	−0.93	8.78	−0.92	8.78	−0.92	8.88	−1.03	8.78
3	−7.87	1.90	−7.86	1.90	−7.86	2.01	−7.98	1.90
4	−2.24	2.17	−2.23	2.16	−2.23	2.28	−2.34	2.16
5	1.97	−6.07	1.98	−6.08	1.98	−5.97	1.87	−6.08
6	0.27	5.26	0.27	5.26	0.27	5.37	0.16	5.26
7	−6.77	−3.47	−6.76	−3.47	−6.76	−3.36	−6.88	−3.47
8	3.11	−1.85	3.12	−1.86	3.12	−1.75	3.01	−1.86
9	6.13	−3.83	6.14	−3.84	6.14	−3.72	6.02	−3.84
10	0.06	2.57	0.07	2.56	0.07	2.67	−0.04	2.56
11	7.21	−5.88	7.22	−5.88	7.22	−5.77	7.11	−5.88
12	4.93	−0.81	4.93	−0.82	4.94	−0.71	4.82	−0.82

表 3　不同约束条件下测区系统误差参数/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Tab. 3　The Area Systematic Error Parameter Values from Different Constraint Conditions/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

约束	$\boldsymbol{G}_1$	$\boldsymbol{G}_2$	$\boldsymbol{G}_3$	$\boldsymbol{G}_4$
参数 c_0	−0.09	−0.11	0	0

采用 t 检验(置信水平 $\alpha=0.05$)对以上 4 种约束下的平差参数进行检验。结果表明, 测区系统误差 c_0 系统性不明显, 除第 6、10 主测线外, 其余主测线和所有副测线具有系统误差, 按照本文提供的调整方法, 可以对各测线(除第 6、10 主测线外)上的测点重力进行调整。交叉点差值经过 1)、2)调整后的余差如表 4 所示。再采用半系统误差调整方法[4] 求得测线系统参数如表 5 所示。

上述计算结果表明, 与秩亏网平差模型基准采用 $\boldsymbol{G}_2$ 约束时计算的结果一致。将表 4 结果与文献[4] 调整结果比较, 二者的调整余差相同。因此, 计算表明半系统误差调整模型是本文测线网秩亏平差的特例, 而测线网秩亏平差在选择基准、显著性检验、顾及观测值先验权等方面, 均比半系统误差调整方法具有更灵活的特点。

表 4　调整后交差点余差/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Tab. 4　The Diffenerce Values at the Crossing Points after Correction/ $10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

	副 1	副 2	副 3	副 4	副 5	副 6	副 7	副 8	副 9	副 10	副 11	副 12
主 1	0.14	0.12	0.05	0.51	0.47	−1.29	0.38	−0.01	1.51	0.26	−1.84	0.23
主 2	−0.68	0.90	0.03	0.19	1.35	−1.41	−0.04	−0.73	1.39	1.49	0.04	−2.59
主 3	−1.03	−1.45	0.68	0.64	−0.10	1.44	−0.59	0.42	−0.86	−0.36	0.69	0.56
主 4	−0.37	1.11	−1.06	−1.40	0.36	1.10	−1.83	0.88	0.40	0.20	0.25	0.32
主 5	1.72	−0.70	0.03	0.79	0.15	0.19	0.46	−0.63	−1.71	−0.01	0.04	−0.39
主 6	1.53	−0.99	0.34	−0.30	0.06	−0.60	−0.63	0.18	−0.20	−0.50	−0.15	1.22
主 7	−0.43	0.75	−0.32	1.14	0.00	0.44	−0.89	0.72	−1.56	−1.06	1.39	−0.14
主 8	0.18	0.86	−0.11	−1.45	−2.59	−0.65	1.42	0.33	1.55	−0.35	0.20	0.57
主 9	1.67	0.45	0.08	−0.06	0.20	−1.36	0.99	0.22	−0.56	0.64	−0.51	0.26
主 10	−1.87	−0.49	0.24	−0.20	1.16	0.90	0.37	0.08	0.20	0.10	−0.85	0.32
主 11	−1.42	0.16	−0.41	−0.25	0.11	0.35	1.62	0.13	−0.35	0.56	0.10	−0.63
主 12	0.57	−0.75	0.48	0.34	−1.20	0.94	0.71	−1.58	0.14	−0.46	0.59	0.26

表5 测线系统参数/ 10^{-5} m·s^{-2}

Tab.5 The Systematic Error Parameter Values from Semi-systematic Error Correction Model/ 10^{-5} m·s^{-2}

测线	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
参数 a	−5.94	−0.92	−7.86	−2.23	1.98	0.27	−6.76	3.12	6.14	0.07	7.22	4.94
参数 b	1.29	8.77	1.90	2.16	−6.08	5.26	−3.47	−1.86	−3.84	2.56	−5.89	−0.82
参数 c_0	−0.11											
交叉点余差中误差 σ_ξ=0.67												

尽管本文首次为海洋测线网数据处理提供了统一的秩亏网平差模型,但在选择基准、顾及观测值先验权和检验方法等方面,还应根据具体测区海洋测线网空间固有的特点,选择合理的约束条件(即秩亏网的平差基准),才能得到合理的系统误差参数,获得准确的平差结果。

参 考 文 献

1 刘雁春. 海洋测深空间结构及其数据处理:[博士论文]. 武汉:武汉测绘科技大学, 1998

2 国家质量技术监督局. 海洋测量规范. 北京:中国标准出版社, 1998

3 [苏]Фепорчено В А. 海洋重力测量成果的系统误差计算. 海洋测绘, 1984(3)

4 黄谟涛. 试论海洋重力测量中的半系统差. 海洋测绘, 1985(1)

5 陶本藻. 测量数据统计分析. 北京:测绘出版社, 1992

6 黄维彬. 近代平差理论及其应用. 北京:解放军出版社, 1991

7 梁开龙, 刘雁春, 管 铮, 等. 海洋重力测量与磁力测量. 北京:测绘出版社, 1996

作者简介:刘雁春,教授,博士。现从事海洋测量数据处理的研究。代表成果:海洋测深空间结构及其数据处理;海洋测量水位改正数学模型;海洋测深波束角效应改正;海洋测量基准面传递的数学模型。已发表论文60余篇,编著出版专著教材共7部。

E-mail: liuyanchun@163.net

The Rank-Defect Adjustment Model for Survey-line Systematic Errors in Marine Survey Net

LIU Yanchun[1] *LI Mingsan*[1] *HUANG Motao*[2]

(1 Department of Hydrography & Mapping, Dalian Naval Academy, 667 Jiefang Road, Dalian, China, 116018)

(2 Tianjin Institute of Hydrographic Surveying and Charting, 40 Youyi Road, Tianjin, China, 360061)

Abstract: The differences between two groups of survey values for crossing points are only used to check and evaluate the quality of observations in marine survey-line net, but have not been used to correct or adjust errors of observation yet. In this paper, the structure of systematic and random error in marine survey net is discussed in details and the adjustment method of observations for marine survey net is studied. Based on the survey-line systematic error model, the formula of the rank-defect adjustment model are deduced according to the modern adjustment theory. An example of calculations using real observed data is carried out to demonstrate the effectiveness of this adjustment model. Moreover, the semi-systematic error correction method used now in marine gravity survey in China only is a special case of the adjustment model in this paper.

Key words: marine survey net; survey-line error structure; the rank-defect adjustment model

About the author: LIU Yanchun, professor, Ph. D. His major research is on the data processing of marine survey. His main achievements include space structure and data processing in marine sounding; mathematic model for tide for correction in hydrographic survey; correction for effect of beam-width in sounding; mathematic model for datum transfer in hydrographic survey. His published papers are more than 60 and books 7.

E-mail: liuyanchun@163.net