

# 两种 GPS 测定电离层电子密度模型的探讨

程鹏飞<sup>1</sup> 李夕银<sup>1</sup> 马建平<sup>2</sup>

(1 中国测绘科学研究院大地测量与工程测量研究所, 北京市北太平路 16 号, 100039)

(2 浙江省测绘局, 杭州市文二路西溪河下 33 号, 310012)

**摘要:** 详细推导出利用 GPS 双频码距及载波相位观测值进行电离层电子密度求定的 Klobuchar 模型以及 Georgiadou 模型, 给出了求定这两种模型参数的数学表达, 从理论上指出该两种模型适合单历元解算的基本条件, 通过实例进行了两种模型的电离层修正误差及误差频率的分析和比较。结果证明, 与 Klobuchar 模型相比, Georgiadou 模型具有表达形式简单, 对模型参数的初值精度要求较低, 数据利用率较高, 参数估计精度较高等优点。

**关键词:** 电离层; 电子密度; 电离层延迟

**中图法分类号:** P225. 8; P228. 41

GPS 测量技术不仅在导航定位方面的应用日趋成熟, 而且在电离层电子密度的测定方面也正显示出优越性。电子密度的测定, 不仅在大气物理学中具有重要意义, 而且在利用 GPS 技术进行定位本身, 如单频 GPS 接收机的基线测量及动态定位精度和可靠性的提高以及在广域差分 GPS 定位等方面, 都具有实用价值。

最早的 GPS 卫星系统的工作频率为 1.575 GHz, 即便是如此高的频率, 电离层仍然会对 GPS 信号产生相当大的延迟, 在最坏的情况下延迟量可达到 300 ns, 相当于 100m 的距离误差。1986 年 Klobuchar 发表的对单频 GPS 接收机用户进行改正的文章<sup>[1]</sup>, 其电离层模型参数目前已公布在 GPS 卫星的广播星历。但是, 该模型参数的确定有一定的限制, 国内公开发表的应用该模型的文章往往忽略了其限定条件。90 年代利用 GPS 数据测定电离层电子密度的工作有了重大进展, 1996 年 1 月 1 日, IGS 数据分析处理中心之一的 CODE (center for orbit determination in europe) 开始在 Internet 网站上公布每天一次的全球电离层图 GIMs(global ionosphere maps)。

## 1 电离层延迟的基本原理

电离层存在于地表上空约 50km 至 1 000km

的大气层中<sup>[2]</sup>。对 GPS 无线电信号而言, 电离层是一种弥散的介质。

由 Fermat 定理可知, 沿光学路径所测距离  $s$  定义为:

$$s = \int n ds \quad (1)$$

式中,  $n$  为介质的折射率;  $ds$  为信号沿光学路径的微元。电离层折射误差定义为所测距离  $s$  与几何距离  $s_0$  的差值, 即

$$\Delta_{\text{电离层}} = s - s_0 = \int n ds - \int ds_0 \quad (2)$$

电离层对 GPS 码距观测值和载波相位观测值的影响是不同的。对码距观测值而言, 其传播是以群速进行的, 因而其信号经过电离层是延迟的。对于载波相位观测值而言, 其传播是以相速进行的, 因而其信号经过电离层是提前到达。以  $f$  表示 GPS 频率, 对以群速和相速传播的信号的电离层延迟可表示为:

$$\Delta_{\text{相速}}^{\text{电离层}} = -\frac{40.28}{f^2} \text{TEC} \quad (3)$$

$$\Delta_{\text{群速}}^{\text{电离层}} = \frac{40.28}{f^2} \text{TEC} \quad (4)$$

TEC(total electron content)表示在卫星和 GPS 接收机间的信号路径上的全部电子密度, 它以 TECU 为单位, 即 1 TECU =  $10^{16} \text{em}^2$ , 这意味着 1 个 TECU 对应着 C/A 码延迟 0.16m, 通常用

TVEC(total vertical electron content)来表示任意视线在天顶方向的 TEC。设接收机的天顶距为  $z_0$ , 其对应的刺穿点  $IP$  的天顶距为  $z_{IP}$ , 则任意方向电离层延迟可以 TVEC 表示为:

$$\Delta_{\text{相速}}^{\text{电离层}} = Q \left[ -\frac{40.3}{f^2} \text{TEC} \right] = -\frac{1}{\cos z_{IP}} \frac{40.3}{f^2} \text{TVEC} \quad (5)$$

$$\Delta_{\text{群速}}^{\text{电离层}} = Q \left[ \frac{40.3}{f^2} \text{TEC} \right] = \frac{1}{\cos z_{IP}} \frac{40.3}{f^2} \text{TVEC} \quad (6)$$

式(5)和(6)中的刺穿点  $IP$  的天顶距  $z_{IP}$  和地面点天顶距  $z_0$  有如下关系:

$$\sin z_{IP} = \frac{R_E}{R_E + h_m} \sin z_0$$

式中,  $R_E$  为地球平均半径, 一般取 6 371km;  $h_m$  为电离层平均高度, 一般取 350km<sup>[1, 3, 4]</sup>, 但近年的研究表明, 电离层平均高度应为 400km, 甚至更高<sup>[5-7]</sup>。

## 2 电离层模型

### 2.1 Klobuchar 模型

Klobuchar 模型由分段函数构成, 对于测站  $i$  和卫星  $j$ , 其天顶方向上对 GPS  $L_1$  信号的时间延迟可表达为:

$$T_i^j = \begin{cases} A_1 + A \cos[2\pi(\tau - A_3)/P] & \text{白天} \\ A_1 & \text{夜间} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $A_1 = 5 \times 10^{-9}$  s, 代表夜间的电离层延迟;  $A$  和  $P$  分别为振幅和周期(以 s 为单位);  $A_3 = 50\ 400$  s, 为相位, 相当于 14h。

对于日出与日落, 该电离层模型用一个余弦曲线代表电离层在天顶方向的时间延迟。参数  $A$  和  $P$  可用电离层参数  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 表示如下:

$$A = \max \left[ \sum_{k=1}^4 \alpha_k \varphi_m^{k-1}, 0 \right] \quad (8)$$

$$P = \max \left[ \sum_{k=1}^4 \beta_k \varphi_m^{k-1}, 7\ 200 \right] \quad (9)$$

式中,  $A, P$  的单位为 s;  $\varphi_m$  为刺穿点  $IP$  的地磁纬度, 以半周为单位。以  $\lambda_{IP}$  表示刺穿点  $IP$  的大地纬度(以 $^\circ$ 为单位), 在历元观测时刻为世界时  $t_{UTC}$  (以 s 为单位)。式(7)中  $\tau$  的计算公式如下:

$$\tau = 240\lambda_{IP} + t_{UTC} \quad (10)$$

值得注意的是, 式(8)、(9)对  $A_2$  和  $A_4$  的计算应取最大值, 一些文献在这一点上的阐述有错。

由式(8)、(9)可知, 在天顶方向上电离层的时间延迟可用电离层参数表示为:

$$T_i^j = T_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \quad (11)$$

以  $c$  代表光速, 对于给定高度角, 电离层对  $L_1$  频段上的折射表示成距离为:

$$\Delta_{L_1}^{\text{电离层}} = c Q T_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \quad (12)$$

利用电离层延迟和频率的关系, 双频接收机接收的双频伪距观测值的组合可表示为:

$$\Delta R_i^j = R_{L_1}^j - R_{L_2}^j = \Delta_{L_1}^{\text{电离层}} - \Delta_{L_2}^{\text{电离层}} = \frac{f_{L_2}^2 - f_{L_1}^2}{f_{L_2}^2} \Delta_{L_1}^{\text{电离层}} \quad (13)$$

由此可建立观测值与电离层模型参数的函数关系:

$$d_i^j = \frac{f_{L_2}^2}{c Q (f_{L_2}^2 - f_{L_1}^2)} \Delta R_i^j = T_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \quad (14)$$

设  $n$  个测站同时观测了  $m$  颗卫星, 则对于单历元的观测方程为:

$$\begin{bmatrix} v_1^1, \dots, v_1^m, \dots, v_n^1, \dots, v_n^m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \delta\alpha_1^1, \dots, \delta\alpha_1^m, \dots, \delta\alpha_n^1, \dots, \delta\alpha_n^m \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1^1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial T_1^1}{\partial \alpha_4} & \frac{\partial T_1^1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial T_1^1}{\partial \beta_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_1^m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial T_1^m}{\partial \alpha_4} & \frac{\partial T_1^m}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial T_1^m}{\partial \beta_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_n^1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial T_n^1}{\partial \alpha_4} & \frac{\partial T_n^1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial T_n^1}{\partial \beta_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_n^m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial T_n^m}{\partial \alpha_4} & \frac{\partial T_n^m}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial T_n^m}{\partial \beta_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 \\ \delta\alpha_3 \\ \delta\alpha_4 \\ \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \delta\beta_3 \\ \delta\beta_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

亦即  $V = \delta D + H \delta X$  (16)

其中各量与式(15)相对应。偏导数计算如下:

$$\frac{\partial T_i^j}{\partial \alpha_k} = \varphi_m^{k-1} \cos \theta, \quad \frac{\partial T_i^j}{\partial \beta_k} = \frac{A \theta \varphi_m^{k-1} \sin \theta}{P^2} \quad (17)$$

$k = 1, 2, 3, 4$ , 对应于  $|\theta| \leq \pi/2$ 。这里,

$$\theta = \frac{2\pi(\tau - A_3)}{P} \quad (18)$$

由式(16)不难得出电离层模型参数的最小二乘解为:

$$\delta X = -(H^T H)^{-1} H^T \delta D \quad (19)$$

需要注意的是, 当  $|\theta| \geq \pi/2$  时, 数据无助于电离层参数的解算, 应该剔除。这意味着在解算

Klobuchar 模型参数时,有部分 GPS 观测数据是无效的。

## 2.2 Georgiadou 模型

由于在一阶近似的情况下,电离层折射与 TVEC 成正比,因此电离层折射可直接通过对 TVEC 的模型化来表示,Georgiadou 模型就是其中的一种。

在 Georgiadou 模型中, TVEC 由多项式表示为<sup>[3,4]</sup>:

$$\text{TVEC}(\varphi, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m E_{i,k} (\varphi - \varphi_0)^i (s - s_0)^k \quad (20)$$

式中,  $\varphi$  为刺穿点 IP 的地理纬度;  $s$  为 IP 的地方时角;  $s_0$  可选择为 IP 在数据集中间时刻对应的地方时角;  $\varphi_0$  可选择为所使用的各观测站的地理纬度的均值;  $E_{i,k}$  为模型参数。

Georgiadou 模型中,阶数  $n$  与次数  $m$  的选择取决于电离层与时空的关系特性。总体讲,  $n$  值取决于空间域,而  $m$  取决于时间域,也就是模型参数估计的更新率。 $m$  太高,将会降低模型参数估计的可靠性。

## 2.3 两种模型比较

1) Klobuchar 模型与 Georgiadou 模型均适用于 GPS 双频码距或零差载波相位数据。如使用载波相位观测值,则在模型参数中均要增加载波相位的模糊度。并且每当出现失周,都需要引进附加参数。

2) Georgiadou 模型对 GPS 数据并没有选择性限制,可利用率大大提高,见式(18)。

3) 设  $t$  为观测历元数,  $N$  为测站数,  $M$  为同步观测卫星数, Klobuchar 模型参数共有 8 个。根据待估参数个数应不大于观测值个数的最小二乘估计的基本条件,则有:

$$MNt \geq 8 \text{ 或 } t \geq \frac{8}{MN} \quad (21)$$

而对于 Georgiadou 模型参数的估计,同理有:

$$MNt \geq (1+m)(1+n)$$

$$\text{或 } t \geq \frac{(1+m)(1+n)}{MN} \quad (22)$$

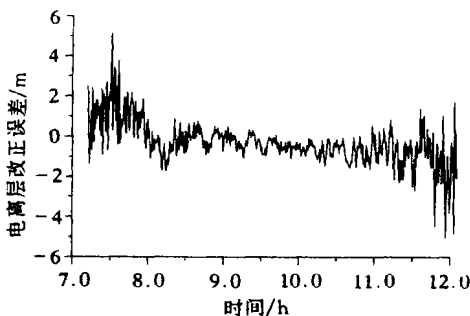
由此可知,以上两种模型既可以利用多个测站的同步观测数据,又可以利用单测站的数据;既可以利用多历元数据,又可以利用单历元数据;既可以同时处理多颗卫星的数据,又可以处理单颗卫星的数据。

4) 由于 Klobuchar 模型是以余弦曲线为基础,因此,在线性化过程中电离层参数的初值要求有一定精度,由卫星播发的导航电文给出,若置零将导致解算发散。而 Georgiadou 模型是一种多项式,表达简单,且对初值无特殊的精度要求。

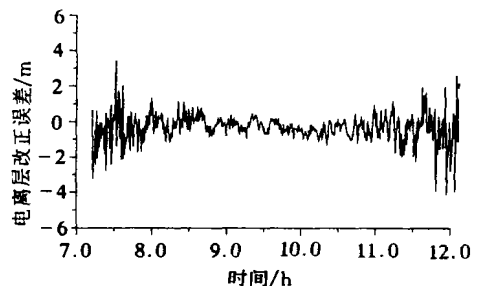
## 3 实例

笔者采用自编的计算软件,使用 27 个 GPS 跟踪站的双频伪距观测数据,分别利用 Klobuchar 模型和 Georgiadou 模型进行了电离层参数的求定。图 1 显示了只使用 SV 29 卫星计算的电离层改正误差,其误差频率直方图见图 2。表 1 给出了使用两种模型时,利用相同的单颗卫星单历元双频码距观测数据解算的电离层改正误差统计。

从图 1 可以看出,两种模型反映出的电离层改正误差的趋势基本上是一致的,但使用 Georgiadou 模型计算电离层改正的精度略高,尤其在使用 Klobuchar 模型计算电离层误差大时,Georgiadou 模型更具优势(精度可提高一倍)。图 2 所示的误差频率直方图更加明显地显示出 Georgiadou 模型的优点,其立方图更加“笔直”,说明小误差更加集中。



(a) Klobuchar 模型



(b) Georgiadou 模型

图 1 电离层改正误差(SV 29)

Fig. 1 Ionospheric Correction Error (SV 29)

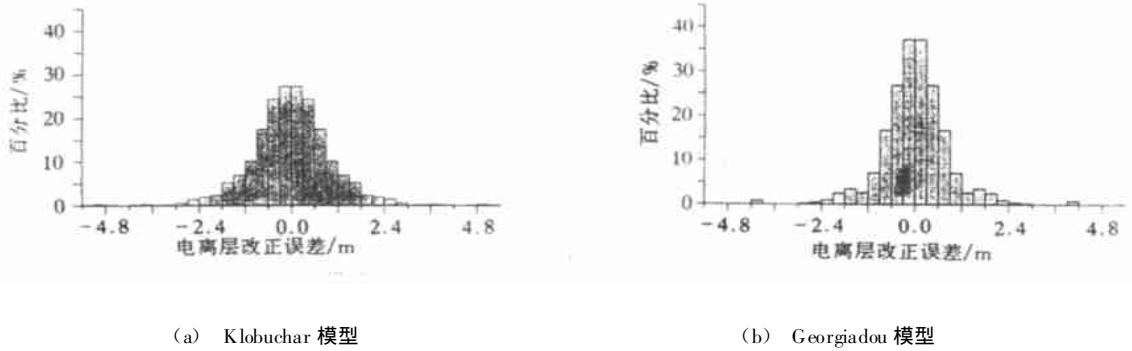


图 2 电离层改正误差频率直方图(SV 29)

Fig. 2 Ionospheric Correction Error Distribution (SV 29)

表 1 使用两种电离层模型解算电离层折射的标准差统计

Tab. 1 Statistics of Solution Using Two Ionospheric Models

卫星	标准差/m	
	Klobuchar 模型	Georgiadou 模型
03	1.3	1.0
04	1.0	1.0
06	1.4	1.1
09	0.8	0.8
18	1.0	0.9
19	1.2	1.1
22	1.0	1.2
25	1.4	1.1
26	1.1	0.8
29	1.1	0.8
30	0.9	0.8
31	1.1	1.0

### 4 结 语

以上讨论了 Klobuchar 和 Georgiadou 电离层模型, 并进行了较为详细的模型参数解算的推导。从 Klobuchar 模型本身来说, 该模型是以余弦函数为主的分段函数, 对参数的初值精度要求较高。同时, 模型的周期和振幅的要求使得部分观测数据对解算无效; Georgiadou 电离层模型则是一个多项式, 模型描述和计算均简单, 对参数初值精度的要求较低, 同时可根据时间域和空间域的要求进行模型的扩充, 所有观测数据均可用于参数的确定。试验证明, 即便使用完全相同的有效观测值, 使用 Georgiadou 模型, 电离层改正的估计精度略高。

两种模型都可以利用多个测站的同步观测数据, 又可以利用单测站的数据; 既可以同时处理多颗卫星的数据, 又可以处理单颗卫星的数据; 既可以利用多历元数据, 又可以利用单历元数据。这

些可应用于广域差分 GPS 电离层参数的实时求定等。同时可利用载波相位观测值求定电离层模型参数, 其模型改正精度可达 0.1~0.3m。从实测数据的解算来看, 使用双频伪距观测数据进行单历元电离层参数的解算, 其改正精度可达 1m。

### 参 考 文 献

- 1 Klobuchar J. Design and Characteristics of the GPS Ionospheric Time Delay Algorithm for Single Frequency Users. PLANS' 86—Position Location and Navigation Symposium, Las Vegas, Nevada, 1986
- 2 Hofmannr Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J. Global Positioning System—Theory and Practice. 5thed. New York; Springer-Verlag Wien, 2001
- 3 Wild U, Beutler G, Gurtner W, et al. Estimating the Ionosphere Using One or More Dual Frequency GPS Receivers The 5th International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Las Cruces, New Mexico, 1989
- 4 Wild U. Ionosphere and Geodetic Satellite Systems; Permanent GPS Tracking Data for Modeling and Monitoring [Ph. D Thesis]. Technische Hochschule Zürich; Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, 1994
- 5 Schaer S, Beutler G, Mervart L, et al. Global and Regional Ionosphere Models Using the GPS Double Difference Phase Observable. Paper Presented at the 1995 IGS Workshop, Postdam, Germany, 1995
- 6 Lin L S, Rizos C. An Algorithm to Estimate GPS Satellite and Receiver  $L_1/L_2$  Differential Delays and Its Application to Regional Ionosphere Modeling. Geomatics Research Australasia, 1996 65: 1~26
- 7 Schaer S, Beutler G, Mervart L, et al. Daily Global Ionosphere Maps Based on GPS Carrier Phase Data Routinely Produced by the CODE Analysis Center. Paper Presented at the IAG AC Workshop Silver Spring, MD, USA, 1996
- 8 Cheng P F. Investigations on the Establishment of DGPS Services in China; [Ph. D Thesis]. Austria; Institute of Applied Geodesy and Photogramtry. Technical University Graz, 1998

作者简介:程鹏飞,研究员。现从事大地测量与导航中的GPS理论与应用方面的研究。代表成果:主持和参加了科技部、国家测

绘局以及其他部门的项目20多个,在国内外发表论文30多篇,其代表作为“Remarks on Doppler-aided Smoothing of Code Ranges”。

E-mail: pfcheng@public.bta.net.cn

## Investigations on Two Models for the Determination of Ionospheric Electron Content

CHENG Pengfei<sup>1</sup> LI Xiyin<sup>1</sup> MA Jianping<sup>2</sup>

(1 Chinese Academy of Surveying and Mapping 16 Beitaijing Road, Beijing, China, 100039)

(2 Zhejiang Provincial Bureau of Surveying and Mapping, Wener Road, 33 Xixihexia, Hangzhou, China, 310012)

**Abstract:** Ionospheric refraction can be expressed by the Total Electron Content (TEC). In this paper the relationship between ionosphere refraction and dual-frequency GPS observables (code ranges/carrier phases) is derived based on Fermat's theorem. Two ionosphere models are chosen, i. e. Klobuchar model and Georgiadou model.

The minimum requirements for solving the model parameters for both models are related to the multiplication of the number of GPS observation sites, the number of observed satellites and the number of epochs for the observation. For Klobuchar model, the multiplication should be smaller than 8, and for Georgiadou model, the multiplication should be smaller than  $(1+m)(1+n)$ , where  $m$  and  $n$  are the degree and the order respectively.

The determination of ionosphere model parameters is derived in detail. Theoretically, it can be proven that: 1) for Klobuchar model, GPS data is additionally constrained, i. e., the data set should be scanned before being put in the estimator, while, for Georgiadou model there is no any constraint to the GPS data; 2) to solve the Klobuchar model parameters, the approximate value of parameters should be within certain accuracy. Otherwise, the estimation process is not convergent. On the other hand, there is no such stringent requirement for Georgiadou model parameter estimation; 3) GPS data of both multi-stations and single station can be used in both models. On the other hand, many data sets, such as multi-epoch data, single epoch data, single satellite data, multi-satellite data, etc. can fit both models.

Test results have shown that the standard deviation of about 1 m can be obtained by using dual-frequency code ranges.

**Key words:** ionosphere; TEC; ionospheric delay

**About the author:** CHENG Pengfei, professor, Ph. D. His research involves the theory and applications of GPS in geodesy and navigation. He has taken charge of more than twenty research projects sponsored by the Ministry of Science and Technology, State Bureau of Surveying and Mapping, etc. He has published more than thirty technical papers. His representative paper is “Remarks on Doppler-aided Smoothing of Code Ranges”.

E-mail: pfcheng@public.bta.net.cn