

不同坐标系综合变换法

杨元喜¹ 徐天河¹

(1 西安测绘研究所, 西安市雁塔路中段 1 号, 710054)

摘要: 不同坐标系统的相似变换法一般不足以将两坐标系系统间的差异纳入坐标转换模型, 因而低精度的坐标框架到高精度的坐标转换往往不能保证统一后的坐标框架的高精度。本文试图将相似变换与回归逼近相结合, 以便顾及低精度大地网中的局部误差积累和变形, 从而提高统一后的坐标框架的精度。

关键词: 坐标转换; 相似变换; 回归逼近

中图法分类号: P226.3; P207.1; P221

GPS、VLBI、SLR 定位精度的不断改进, 已使新的 ITRF (国际地球参考框架) 点的精度达到 cm 级以上, 而且基于 GPS、VLBI、SLR 等空间技术标定的新的地心坐标系的精度均匀, 不存在明显的误差积累。然而, 我国目前用以测图及工程规划、设计以及军事用途的大地控制点仍为常规地面测量控制点。这些地面测量控制点一般又都是基于北京 54 坐标系或西安 80 坐标系。为了将不同大地网统一于同一坐标基准, 常采用相似变换模型, 如 Bursa 模型、Molodensky 模型和 Veis 模型 (Vanicek, Krakiwsky, 1982)。相似变换模型一般含 3 个平移参数、3 个旋转参数和 1 个尺度参数。由若干个 (一般多于 3 个) 公共点坐标求得上述 7 个转换参数后即可进行不同坐标系的转换。

实际上, 基于经典大地测量网标定的坐标系不可避免地存在局部变形 (熊介, 杨元喜, 1990), 因为经典大地测量受局部地球物理因素的影响, 如地壳运动、局部大气影响等。此外, 经典大地测量网还受累积误差的影响, 于是, 两坐标系间经相似变换后往往还存在 m 级残差。为了顾及经典大地网的局部变形, 有学者提出采用两组旋转参数的坐标转换模型, 如 Hotine 模型、Krakiwsky-Thomson 模型及 Vanicek-Wells 模型 (Vanicek, Krakiwsky, 1982)。利用两组旋转参数进行坐标转换也存在两个问题: ①增加一组旋转参数将导致坐标转换模型秩亏, 于是解算中常需附加条件; ②新增加旋转参数也只能顾及大地网

的平均旋转, 不可能顾及到局部扭曲与累积误差。基于上述分析, 两组旋转参数的坐标转换模型仍难保证转换后的坐标框架点的精度。也有学者提出采用高崩溃污染率的坐标转换模型 (Yang, 1999), 旨在通过抗差估计抵制那些显著异常坐标点对相似变换参数的影响。但仅求得可靠的相似变换参数, 有时还不足以将广泛、系统误差明显的大地网可靠地统一起来。为了顾及大地网的局部系统性误差, 有人提出可变参数的坐标变换法 (朱华统, 吕志平, 1985; 朱华统, 杨元喜, 1994; Hussein, 1994)。

坐标系系统间的差异主要来自于坐标系统的定义差, 即原点位置、坐标轴向的定向和尺度的定义差。坐标转换时应优先考虑坐标系定义差异的转换, 即首先应完成相似变换。在相似变换的基础上, 再考虑对剩余误差进行拟合, 使精度较低的坐标框架点附合到精度较高的坐标系统的框架点坐标, 使统一后的坐标系框架点坐标具有较好的一致性。

1 相似变换与多项式拟合的组合

现假设新坐标系点位精度明显高于旧坐标系精度, 基于此, 坐标转换后公共点闭合差可强制分配给旧坐标系中的点位坐标, 以保证经坐标转换后, 点位坐标尽量附合于新坐标系中的高精度坐标。

设相似变换模型为:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & k & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \quad (1)$$

式中, $[X_i Y_i Z_i]_N^T, [X_i Y_i Z_i]_O^T$ 分别表示 i 点在新、旧坐标系统中的点位坐标; $[x_0 y_0 z_0]^T$ 为平移参数向量; ϵ_x, ϵ_y 和 ϵ_z 为 3 个旋转参数; k 为尺度参数。

将式(1)改写成误差方程:

$$\begin{bmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \\ V_{Z_i} \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_i & Y_i & X_i \\ 0 & 1 & 0 & Z_i & 0 & -X_i & Y_i \\ 0 & 0 & 1 & -Y_i & X_i & 0 & Z_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0, y_0, z_0, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, k \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} W_{X_i} \\ W_{Y_i} \\ W_{Z_i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{bmatrix} W_{X_i} \\ W_{Y_i} \\ W_{Z_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O \quad (3)$$

将式(2)简写成:

$$V = AT - W \quad (4)$$

则转换参数向量 T 的最小二乘解为:

$$T = (A^T P A)^{-1} A^T P W \quad (5)$$

式中, P 为由 $W_{X_i}, W_{Y_i}, W_{Z_i}$ 的中误差确定的权矩阵。

现假设由经典大地测量网标定的 $[X_i Y_i Z_i]_O^T$ 存在系统误差、累积误差或区域变形, 则经相似变换后这些具有局部性质的误差很难拟合到相似变换模型的 7 个参数中, 从而导致公共点上残差出现明显的区域系统误差。为此, 笔者再对公共点剩余误差进行拟合。

现将公共点残差表示为:

$$V_{X_i} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} B^{i-j} L^j \quad (6)$$

式中, B 为大地纬度; L 为大地经度 (B, L 均以弧度表示); α_{ij} 为待定系数。 V_{Y_i} 和 V_{Z_i} 可作类似表示。式(6)类似于 Abou-Beih 和 AL-Garni 的可变基准转换法 (Abou-Beih, AL-Garni, 1996), 但是式(6)是以剩余残差为观测量的。

将式(6)再表示成新误差方程为:

$$V_{X_i} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} B^{i-j} L^j - V_{X_i} \quad (7)$$

式中, V_{X_i} 为 V_{X_i} 的残差; 系数向量 α 的最小二乘解为:

$$\alpha = (B^T B)^{-1} B^T V_X \quad (8)$$

式中, B 为 $n \times k$ 设计矩阵; V_X 为列向量。它们的表达式分别为:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & L_1 & B_1^2 & B_1 L_1 & L_1^2 & \dots \\ B_2 & L_2 & B_2^2 & B_2 L_2 & L_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n & L_n & B_n^2 & B_n L_n & L_n^2 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \dots]^T$$

$$V_X = [V_{X_1}, V_{X_2}, \dots, V_{X_n}]^T$$

同理, 可解得对应于 Y 分量和 Z 分量的残差拟合多项式系数向量。

最后, 旧坐标到新坐标系的转换结果为:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_O - \begin{bmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \\ V_{Z_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, $[X_i Y_i Z_i]_N^T$ 为由式(1)经相似变换求得的点在新坐标系中的坐标; V_{X_i} 由式(6)、(8)解算; V_{Y_i} 和 V_{Z_i} 同理。

2 拟合阶数的确定

拟合阶数的确定是一个非常复杂的问题, 它与坐标点的分布、精度、个数等因素有关。阶数的确定实质是系统参数个数的确定, 通过假设检验可以诊断模型是否正确或引入的系统参数是否显著。但实际上, 模型检验通过, 并不能说明该模型是最好的。在实际应用中, 更重要的是对各种模型比较, 以便选择一个最优模型, 即选出一组最优的附加参数。通常有两种较为常用的模型优选准则 (黄维彬, 1992; 张守信, 1999)。

2.1 单位权方差准则

残差平方和 $\Omega = V^T P V$ 反映了模型拟合的程度, 但仅用 Ω 作为模型拟合的准则, 必然导致选用的附加参数愈多愈好。为了防止引入过多的附加参数, 常用的方法是在残差平方和 Ω 上附加对增加参数的惩罚因子, 即采用单位权方差估值的计算式, 记为 σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{V^T P V}{n - t} \quad (10)$$

式中, n 为观测值个数; t 为模型中参数的个数。

显然, 因子 $(n-t)^{-1}$ 是随着附加参数的个数增加而增加, 它体现了 t 对增加附加参数个数所施加的一种惩罚。

2.2 赤池信息量准则——AIC 准则

这是赤池弘次(H. Akaike)在 70 年代研究信息量问题而提出的一种选择模型的方法(刘璋温, 1980), 它在统计分析中特别是在统计模型的选择中有着广泛的应用。这个方法基于 AIC (akaike information criterion) 统计量, AIC 的定义为:

$$AIC = -2 \ln(\text{模型的极大似然函数的最大值}) + 2(\text{模型中独立参数个数})$$

式中, 右端第一项是似然函数的最大值(即把极大似然估计值代入似然函数乘以 -2), 它是衡量拟合度的一个指标; 第二项可以解释为对增加参数个数的一种惩罚。

赤池建议, 当从一组可供选择的模型中选择最佳模型时, 选择 AIC 最小的模型是可取的。这样看来, 数据拟合好, 又尽可能减少参数的数目的模型才是最佳模型。这个准则的优点是, 只要模型的似然函数有定义, 不论什么统计模型都能适用。此外 AIC 不需要统计表, 因而避免了统计检验中的主观倾向, 如显著水平的选取等。也应指出, AIC 的缺点是, 模型的分布类型必须是已知的。若观测向量服从正态分布, AIC 可表示为:

$$AIC = n \ln \sigma_0^2 + 2t \quad (11)$$

实际中, 观测向量的分布类型并非已知, 因此应用此准则也受到一定的限制。有时为了简单起见, 可近似认为观测向量服从正态分布。

比较式(10)和式(11)可以看出, 两种准则的原理实质上是一样的, 只是它们对增加参数个数的惩罚方式不同而已。

3 计算与分析

现以某地区 37 个 GPS 点的 WGS-84 坐标系坐标与相应公共点上 1954 年北京坐标系坐标转换为例。在转换参数的计算中, 有 32 个点参加计算, 另 5 个点(3, 9, 18, 24, 34)作为外部检核。

计算方法: 首先用 7 参数 Bursa 模型进行公共点转换, 然后对转换后的残差进行曲面拟合, 拟合阶数的选取采用单位权中误差准则。计算结果如表 1 所示。

由表 1 可知, 按单位权中误差最小准则, 可得最佳拟合阶数: X 轴为 3 阶, Y 轴为 5 阶, Z 轴为 4 阶。

以最佳拟合阶数按式(8)求得曲面的系数如

表 2 所示。

表 1 不同阶数对应的单位权中误差

Tab. 1 The Results of Weight Unit Variances According to Different Orders

阶数 K	σ_x	σ_y	σ_z
1	0.784 0	1.178 2	0.819 9
2	0.702 5	0.930 4	0.864 7
3	0.505 4	0.923 1	0.775 3
4	0.527 8	0.896 6	0.725 4
5	0.536 6	0.840 9	0.759 5
6	0.814 7	1.361 3	1.196 5

表 2 拟合系数结果

Tab. 2 The Results of the Fitting Coefficients

系数 $\hat{\alpha}_{ij}$	拟合阶数		
	3(X 轴)	5(Y 轴)	4(Z 轴)
0, 0	-41.750	21 688.698	451.653
1, 0	177.465	-63 530.977	1 547.388
1, 1	-20.053	-35 609.081	-1 694.416
2, 0	128.078	98 256.486	-1 764.343
2, 1	-276.687	63 878.470	-1 038.425
2, 2	71.397	26 946.140	1 640.021
3, 0	-72.324	-65 504.654	759.528
3, 1	1.232 25	-84 631.289	897.308
3, 2	74.540	-19 751.919	190.463
3, 3	-23.487	-12 240.807	-629.712
4, 0		13 915.490	45.827
4, 1		46 561.871	-394.306
4, 2		20 260.349	-20.389
4, 3		1 642.473	-22.759
4, 4		3 207.815	87.727
5, 0		4 937.109	
5, 1		-14 881.825	
5, 2		-1 856.642	
5, 3		-2 850.356	
5, 4		352.385	
5, 5		-379.574	

用最佳拟合阶数求解得到的各分量的标准偏差与 Bursa 模型所得的结果进行比较, X 轴标准偏差计算公式为:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{V_x V_x^T}{n-1}} \quad (12)$$

Y 轴和 Z 轴标准偏差公式类似式(12), 计算结果见表 3。综合变换与 Bursa 模型各点位内部残差比较图如图 1, 2, 3 所示。

外部检核点(3, 9, 28, 24, 34)的残差统计结果采用如下公式:

$$\text{Sum } X = \left[\frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 V_{X_i}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (13)$$

$$\text{Sum } Y = \left[\frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 V_{Y_i}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\text{Sum}Z = \left[\frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 V_{Z_i}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (15)$$

$$\text{Sum} = \left[\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \left(V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2 + V_{Z_i}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (16)$$

其结果见表 4。

表 3 内部残差统计结果

Tab. 3 The Statistic Result of Interior Residuals

方案	标准偏差/m		
	X	Y	Z
Bursa 模型	0.863 4	1.191 4	0.859 3
综合变换	0.425 8	0.500 9	0.537 2

表 4 外部残差统计结果

Tab. 4 The Statistic Result of Exterior Residuals

统计量	Bursa 法/m	综合法/m
SumX	0.860 8	0.454 8
SumY	0.586 1	0.721 2
SumZ	0.369 2	0.610 6
Sum	0.637 9	0.605 5

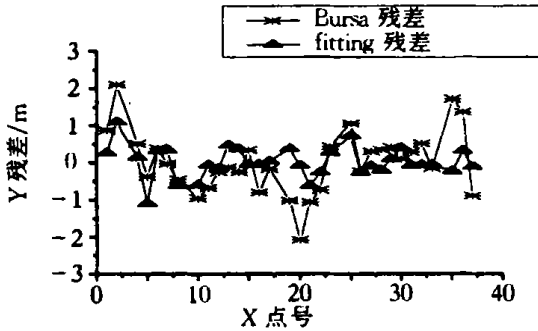


图 1 X 轴公共点残差比较

Fig. 1 The Residual Comparisons of X Axis Common Points

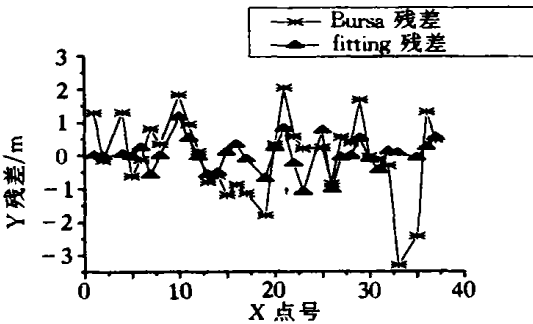


图 2 Y 轴公共点残差比较

Fig. 2 The Residual Comparisons of Y Axis Common Points

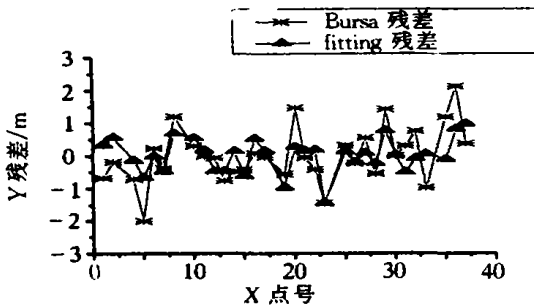


图 3 Z 轴公共点残差比较

Fig. 3 The Residual Comparisons of Z Axis Common Points

由上述计算结果,可以得出:

1)用 Bursa 模型进行坐标转换,公共点残差

较大,有的甚至达到 3m 多,超过 2m 的也很多(见图 1, 2, 3)。这同时也反映了我国经典大地网存在局部变形,仅用相似变换进行坐标转换不能顾及经典大地网的局部扭曲和累积误差。

2)用相似变换与曲面拟合组合的综合变换法,能有效地顾及大地网局部系统误差,变换后的残差基本上在 dm 级(个别点在 1m 以上),大的局部变形点系统误差得到了很好的控制。综合变换法充分顾及了两坐标系统间定义的几何意义与物理意义,相似变换反映了两系统间的定义差,而曲面拟合描述了经典大地网的局部变形和误差累积。

3)外部检核残差结果显示,综合变换法整体上优于相似变换,变换后的残差都在 m 级以下,但并非综合变换法保证能在各点、各轴向的残差都小于相似变换结果。而用 Bursa 模型转换的外部检核残差出现较大的(1m 以上),在综合变换中都降了下来。当然,也出现了综合变换模型外部检核残差比 Bursa 模型大的情况,但都是在 dm 级。整体而言,综合变换法要好于相似变换方法。

参 考 文 献

- 1 熊 介, 杨元喜. 三维大地网的转换与变形. 测绘学报, 1988, 17(1): 1~8
- 2 Vanicek P, Krakiwsky E. Geodesy—the Concepts. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1982. 392~393
- 3 Yang Y X. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation. Journal of Geodesy, 1999, 73: 268~274
- 4 朱华统, 吕志平. 联系人卫网和地面网的多项式逼近法. 军事测绘专辑, 1985(31)
- 5 朱华统, 杨元喜, 吕志平. GPS 坐标系统变换. 北京: 测绘出版社, 1994
- 6 Abd-Elmotaal H. Comparison of Polynomial and Similarity Transformation Based Datum-Shifts for Egypt. Bulletin Geodesique, 1994, 68: 168~172
- 7 Abou-Beih O M, Af-Garni A M. Precise Geodetic Positioning Based on the Concept of Variable Datum Transformation Parameters. The Australian Surveyor, 1996. 214~220

8 黄维彬. 近代平差理论及其应用. 北京: 解放军出版社, 1992. 441 ~ 442

9 张守信. 航天测量数据处理. 北京: 解放军出版社, 1999. 201 ~ 202

10 刘璋温. 赤池信息量准则 AIC 及其意义. 数学的实践与认识, 1980(3)

作者简介: 杨元喜, 教授, 博士生导师。主要研究方向为大地测量数据处理理论与方法, 在国内外发表论文 100 余篇。

The Combined Method of Datum Transformation between Different Coordinate Systems

YANG Yuanxi¹ XU Tianhe¹

(1 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Middle Yanta Road, Xi'an, China 710054)

Abstract: The similarity transformation method between different coordinate systems is not enough to describe the discrepancy of them. So the coordinate transformation from low precise coordinate frame to the high can not make sure a high precise reference frame after this transformation. In this paper, a combined method of similarity transformation and regressive approximating is presented. The local error accumulation and distortion are considered using the combined method and the precise of coordinate system is improved after the transformation using the recommended method.

Key words: coordinate transformation; similarity transformation; regressive approximating

About the author: YANG Yuanxi, professor, Ph.D supervisor. He is mainly engaged in the research on the theory and method of surveying data processing. About 100 articles of his have been published at home and abroad.

欢迎订阅 欢迎投稿

《武汉大学学报·信息科学版》(双月刊)即原《武汉测绘科技大学学报》,是以测绘为主的专业学术期刊。其办刊宗旨是:立足于测绘学科前沿,面向国际测量界,通过发表具有创新性和重大研究价值的测绘理论成果,展示中国测绘研究的最高水平,引导测绘学术研究的方向。本刊为中国核心期刊,中国测绘行业惟一的国家级优秀期刊,并入选中国期刊方阵。

本刊主编为李德仁院士,主要栏目有院士论坛、学术论文、科技新闻等,内容涉及摄影测量与遥感、大地测量与物理大地测量、工程测量、地图学、图形图像学、地球动力学、地理信息系统、全球定位系统等。收录本刊论文的著名国际检索系统有 EI、SCI、PKJ、ZIV、国际大地测量文献题录等。其影响因子名列中国高校学报第 2 位。

本刊为双月刊, A4 开本, 112 面, 逢双月 5 日出版, 国内外公开发行。邮发代号: 38—317。