文章编号:1000-050X(2001)03-0213-04　　文献标识码:A

地图数字化的坐标转换及数据的精度与相关性

黄加纳[1]　蓝悦明[1]　覃文忠[2]

(1　武汉大学测绘科学与技术学院,武汉市珞喻路129号,430079)
(2　同济大学测量与国土信息工程系,上海市四平路1239号,200092)

摘　要:在分析地图数字化坐标数据的误差性质时,通常将经过坐标转换后的坐标值作为相互独立的数字化观测值,而将它们与相应的已知坐标之差值当作相互独立的随机误差进行分析。为了对数字化坐标数据及其误差进行更深入严密的分析,本文将用来求转换参数的已知点的地面坐标和数字化坐标都视为观测值,并用附有参数的条件平差法来求转换参数,再进一步对转换后的数字化坐标的精度和其相关性进行讨论。

关键词:数字化数据;转换参数;精度;相关性
中图法分类号:P207;P283.7

地图数字化(包括手工数字化和扫描数字化)是目前获取矢量GIS坐标数据的重要来源。数字化数据通常包括系统误差和随机误差。由于系统误差的主要来源是数字化仪(或扫描仪)与地面坐标系不一致及图纸的变形误差,可通过坐标转换来削弱系统误差的影响。而在分析随机误差的性质时,通常是将经坐标转换后的坐标值作为相互独立的数字化观测值,而将它们与相应的已知坐标之差值当作相互独立的随机误差进行检验和分析,并得到了一些具有参考价值的结论。

1　地图数字化坐标变换的一般方法

地图数字化坐标变换一般是采用相似变换模型,即选择常用的4个参数,通过平移、旋转和缩放来实现数字化坐标系转换为地面坐标系。设k点在地面坐标系的坐标为(x_k, y_k),相应的数字化坐标为(ξ_k, η_k),则转换关系为:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中,a_0,b_0是平移参数,即数字化坐标系原点在地面坐标系中的坐标;μ是缩放系数;α是旋转参数,一般来说,α是个微小量。通常将缩放与旋转参数取为:

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu\cos\alpha \\ b &= \mu\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

并将式(1)写为:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_k & -\eta_k \\ \eta_k & \xi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{3}$$

对几个已知地面坐标(x_k, y_k)的控制点(或界址点、格网点)数字化,得到其数字化坐标(ξ_k, η_k),则可利用这些点来求转换参数的估计值$(\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{a}, \hat{b})$。求这些转换参数估值的一般方法是,由式(3)对$(x_k, y_k)$写出误差方程为:

$$\begin{bmatrix} v_{x_k} \\ v_{y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_k & -\eta_k \\ 0 & 1 & \eta_k & \xi_k \end{bmatrix} \delta\hat{X} - \begin{bmatrix} l_{x_k} \\ l_{y_k} \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中,

$$\left.\begin{aligned} &\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{b}_0 \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 \\ b_0^0 \\ a^0 \\ b^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\hat{a}_0 \\ \delta\hat{b}_0 \\ \delta\hat{a} \\ \delta\hat{b} \end{bmatrix} = X^0 + \delta\hat{X} \\ &\begin{bmatrix} l_{x_k} \\ l_{y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - (a_0^0 + \xi_k a^0 - \eta_k b^0) \\ y_k - (b_0^0 + \eta_k a^0 + \xi_k b^0) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式(5)中,a_0^0,b_0^0,a^0,b^0均表示参数的近似值。

对于所有的(x_k, y_k),有误差方程:

$$\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{B}\,\delta\hat{X} - \boldsymbol{l}_x \tag{6}$$

式中,

$$\boldsymbol{V}_x = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \cdots \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & -\eta_1 \\ 0 & 1 & \eta_1 & \xi_1 \\ 1 & 0 & \xi_2 & -\eta_2 \\ 0 & 1 & \eta_2 & \xi_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{l}_x = \begin{bmatrix} l_{x_1} \\ l_{y_1} \\ l_{x_2} \\ l_{y_2} \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{7}$$

收稿日期:2000-08-18。
项目来源:测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目(992120)。

组成法方程可解得:

$$\delta\hat{X} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_x \tag{8}$$

式中,

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} n & 0 & \sum_k \xi_k & -\sum_k \eta_k \\ 0 & n & \sum_k \eta_k & \sum_k \xi_k \\ \sum_k \xi_k & \sum_k \eta_k & \sum_k (\xi_k^2 + \eta_k^2) & 0 \\ -\sum_k \eta_k & \sum_k \xi_k & 0 & \sum_k (\xi_k^2 + \eta_k^2) \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_x = \begin{bmatrix} \sum_k l_{x_k} \\ \sum_k l_{y_k} \\ \sum_k (l_{x_k}\xi_k + l_{y_k}\eta_k) \\ \sum_k (l_{y_k}\xi_k - l_{x_k}\eta_k) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$的逆阵为:

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{R} \cdot \begin{bmatrix} \sum_k (\xi_k^2 + \eta_k^2) & 0 & -\sum_k \xi_k & \sum_k \eta_k \\ 0 & \sum_k (\xi_k^2 + \eta_k^2) & -\sum_k \eta_k & -\sum_k \xi_k \\ -\sum_k \xi_k & -\sum_k \eta_k & n & 0 \\ \sum_k \eta_k & -\sum_k \xi_k & 0 & n \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$R = n\sum_k (\xi_k^2 + \eta_k^2) - [(\sum_k \xi_k)^2 + (\sum_k \eta_k)^2] \tag{11}$$

在按式(8)得到转换参数的估值后,即可按式(6)或式(4)求得改正值 $\boldsymbol{V}_x$。

2 按附有参数的条件平差法进行坐标转换

可以看到,上述数字化坐标转换的一般方法,在形式上是将地面点坐标(x_k, y_k)当作有误差的观测值,而将数字化坐标(ξ_k, η_k)当作无误差的数值。实际上,数字化坐标(ξ_k, η_k)的误差一般都大于(x_k, y_k)的误差,为此,将(ξ_k, η_k)和(x_k, y_k)都当作观测值,此时,由式(3)得到附有参数的条件方程为:

$$\left.\begin{aligned} &-v_{x_k} + a^0 v_{\xi_k} - b^0 v_{\eta_k} + \delta\hat{a}_0 + \xi_k \delta\hat{a} - \\ &\quad \eta_k \delta\hat{b} - l_{x_k} = 0 \\ &-v_{y_k} + b^0 v_{\xi_k} + a^0 v_{\eta_k} + \delta\hat{b}_0 + \eta_k \delta\hat{a} + \\ &\quad \xi_k \delta\hat{b} - l_{y_k} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

对于所有的$(x_k, y_k, \xi_k, \eta_k)$,有条件方程为:

$$\boldsymbol{AV} + \boldsymbol{B}\,\delta\hat{X} - \boldsymbol{l}_x = \boldsymbol{O} \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{l}_x$ 的意义同式(7),而 $\boldsymbol{V}$ 是观测值 $\boldsymbol{L}$ 的改正值,有:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{L}_x^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{L}_\xi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [x_1\, y_1\, x_2\, y_2 \cdots \xi_1\ \eta_1\ \xi_2\ \eta_2 \cdots]^{\mathrm{T}} \\ &\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{V}_x^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{V}_\xi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [v_{x_1}\ v_{y_1}\ v_{x_2}\ v_{y_2} \cdots v_{\xi_1}\ v_{\eta_1}\ v_{\xi_2}\ v_{\eta_2} \cdots]^{\mathrm{T}} \\ &\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_x \ \ \boldsymbol{A}_\xi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^0 & -b^0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & b^0 & a^0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^0 & -b^0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b^0 & a^0 & \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由条件方程式(13)组成法方程为:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \delta\hat{X} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_x \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \boldsymbol{O} \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{K}$ 是相应于条件方程式(13)的联系数向量;$\boldsymbol{Q}$ 是由$(x_k, y_k, \xi_k, \eta_k)$构成的观测值的协因数阵,设它们是相互独立的观测值,且设 x_k, y_k 的协因数均为 q_x;ξ_k, η_k 的协因数均为 q_ξ。由式(15)可解得:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{l}_x - \boldsymbol{B}\,\delta\hat{X}) \\ &\delta\hat{X} = [\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{l}_x \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

当旋转参数为微小量时,可取 $a^0 = 1$, $b^0 = 0$,则有:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_x \ \boldsymbol{A}_\xi] = [-\boldsymbol{I} \ \ \boldsymbol{I}]$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}} = (q_x + q_\xi) \cdot \boldsymbol{I} \\ &\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{q_x + q_\xi}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \\ &\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AQA}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{l}_x = \frac{1}{q_x + q_\xi}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_x \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

此时可得到:

$$\delta\hat{X} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_x \tag{18}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{q_x + q_\xi}[\boldsymbol{l}_x - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_x] \tag{19}$$

还可以求得观测值的改正值为:

$$\left.\begin{aligned}V_x &= q_x A_x^{\mathrm{T}} K = -q_x K = \frac{q_x}{q_x+q_\xi}(B\,\delta\hat{\lambda} - l_x)\\ V_\xi &= q_\xi A_\xi^{\mathrm{T}} K = q_\xi K = \frac{q_\xi}{q_x+q_\xi}(l_x - B\,\delta\hat{\lambda})\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

可以看到, 求解转换参数的式(18)与式(8)是相同的。也就是说, 当旋转参数是微小量时, 按附有参数的条件平差法求定的转换参数在数值上与一般方法是一致的, 但作为观测值的(x_k, y_k), 其改正值与其协因数 q_x 和 q_ξ 的取值有关。

3　数字化坐标转换结果的精度与相关性

在式(18)或式(8)中, 有:

$$\begin{bmatrix} l_{x_k}\\ l_{y_k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - (a_0^0 + a^0\xi_k - b^0\eta_k)\\ y_k - (b_0^0 + b^0\xi_k + a^0\eta_k)\end{bmatrix}\tag{21}$$

若认为(x_k, y_k)与(ξ_k, η_k)均有误差, 设 x_k, y_k 的方差为σ_x^2, 协因数为 $q_x=\sigma_x^2/\sigma_0^2$; 设 ξ_k, η_k 的方差为σ_ξ^2, 协因数为 $q_\xi=\sigma_\xi^2/\sigma_0^2$。仍考虑旋转参数为微小量, 取 $a^0=1$, $b^0=0$, 则有:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}l_{x_k} &= \mathrm{d}x_k - \mathrm{d}\xi_k\\ \mathrm{d}l_{y_k} &= \mathrm{d}y_k - \mathrm{d}\eta_k\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

因此, l_{x_k}和l_{y_k}的方差为:

$$\sigma_l^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\xi^2\tag{23}$$

而转换参数估值 $\hat{\lambda}=[\hat{a}_0\ \ \hat{b}_0\ \ \hat{a}\ \ \hat{b}]^{\mathrm{T}}$ 的方差应为:

$$D_{\hat{\lambda}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}(\sigma_x^2+\sigma_\xi^2) = \frac{\sigma_x^2+\sigma_\xi^2}{R}\cdot\begin{bmatrix}\sum_k(\xi_k^2+\eta_k^2) & 0 & -\sum_k\xi_k & \sum_k\eta_k\\ 0 & \sum_k(\xi_k^2+\eta_k^2) & -\sum_k\eta_k & -\sum_k\xi_k\\ -\sum_k\xi_k & -\sum_k\eta_k & n & 0\\ \sum_k\eta_k & -\sum_k\xi_k & 0 & n\end{bmatrix}\tag{24}$$

当用于求转换参数的点数 n 足够多时, 也可按下式求单位权中误差的估值:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}V}{4n-4}\tag{25}$$

则 σ_x^2 与σ_ξ^2 的估值为:

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^2 &= q_x\hat{\sigma}_0^2\\ \hat{\sigma}_\xi^2 &= q_\xi\hat{\sigma}_0^2\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

对于任意点 i, 若其数字化坐标为(ξ_i, η_i), 则将它们转换为地面坐标:

$$\begin{bmatrix} x_i\\ y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{a}_0 + \hat{a}\xi_i - \hat{b}\eta_i\\ \hat{b}_0 + \hat{a}\eta_i + \hat{b}\xi_i\end{bmatrix}\tag{27}$$

顾及 $a^0=1$, $b^0=0$, 可得微分式:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_i\\ \mathrm{d}y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}\xi_i\\ \mathrm{d}\eta_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & \xi_i & -\eta_i\\ 0 & 1 & \eta_i & \xi_i\end{bmatrix}\mathrm{d}\hat{\lambda}\tag{28}$$

将上式写为:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_i\\ \mathrm{d}y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}\xi_i\\ \mathrm{d}\eta_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{x_i}\\ B_{y_i}\end{bmatrix}\mathrm{d}\hat{\lambda}\tag{29}$$

则可得:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x_i}^2 &= \sigma_\xi^2 + B_{x_i}D_{\hat{\lambda}}B_{x_i}^{\mathrm{T}}\\ \sigma_{y_i}^2 &= \sigma_\xi^2 + B_{y_i}D_{\hat{\lambda}}B_{y_i}^{\mathrm{T}}\\ \sigma_{x_iy_i} &= B_{x_i}D_{\hat{\lambda}}B_{y_i}^{\mathrm{T}} = 0\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

而对于(x_i, y_i)和(x_j, y_j), 有协方差:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_ix_j} & \sigma_{x_iy_j}\\ \sigma_{y_ix_j} & \sigma_{y_iy_j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_{x_i}D_{\hat{\lambda}}B_{x_j}^{\mathrm{T}} & B_{x_i}D_{\hat{\lambda}}B_{y_j}^{\mathrm{T}}\\ B_{y_i}D_{\hat{\lambda}}B_{x_j}^{\mathrm{T}} & B_{y_i}D_{\hat{\lambda}}B_{y_j}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \neq O\tag{31}$$

可以看到, 数字化坐标转换为地面坐标后, 它们的方差可按式(30)得到, 同一点的 x_i 和 y_i 之间的协方差等于零, 说明转换后是不相关的。但不同点之间的协方差并不等于零, 表明不同点坐标之间是相关的。例如, 当以 4 个图廓点求转换参数时, 数字化坐标为(0.1, 0.1)与(0.2, 0.2)的相关系数为 0.35。

4　结　语

从以上的讨论可以看到, 采用附有参数的条件平差法求解地图数字化坐标转换参数, 在理论上更为合理。文中的推证说明, 当旋转参数是微小量时, 用两种方法得到的转换参数相同, 而作为观测值的地面坐标和数字化坐标的改正值与其协因数的取值有关。

本文还证明了经坐标转换后的数字化坐标值, 对同一点的坐标 x_i 和 y_i 可以认为是相互独立的, 但不同点的坐标之间存在相关性。目前, 在一些探讨地图数字化坐标数据的误差分布和统计

性质的文献中,一般都忽略了这种相关性。为了对数字化数据的误差分布及统计性质有更准确的认识,建议在顾及这种相关性的基础上进一步探讨。

参 考 文 献

1 宋其友. 土地信息学. 北京: 测绘出版社, 1996

2 刘大杰, 史文中, 童小华, 等. GIS 空间数据的精度分析与质量控制. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999

3 黄幼才, 刘文宝, 肖道纲, 等. GIS 空间数据误差分析和处理. 武汉: 中国地质大学出版社, 1995

4 杨启和, 杨晓梅. 数字化地形图数据处理方法与分析. 测绘通报, 1995(2): 31~35

作者简介: 黄加纳, 教授。现主要从事大地测量数据处理研究。代表成果: 起算数据误差影响下的方差分量估计; 导线网可靠性分析和粗差探查。

E-mail: Huangjn16@hotmail.com

Coordinate Conversion of Map Digitization, Precision and Correlation for Digitized Data

HUANG Jiana[1] *LAN Yueming*[1] *QIN Wenzhong*[2]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 Dept. of Surveying and Geomaitcs, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai, China, 200092)

Abstract: In studying error natures of digitized map coordinates, coordinates after conversion is usually regarded as independent digitized observations and regarded variate values between conversion coordinates and given coordinates as independent random errors. In order to analyse digitized coordinate data and those errors strictly, this paper adopted adjustment of condition equations with unknowns to solve coordinate conversion parameters, and precision and correlation for digitized coordinate errors are further discussed.

Discussion showed that the former analysis method is more reasonable than others in theory and that two kinds of conversion parameters with two methods of adjustment of condition equations with unknowns and indirect adjustment are equal, but that corrected values of terrestrial coordinates and digitized coordinates regarded as observations are concerned with weight coefficients. At the same time, coordinates x_i and y_i of a point are not correlate after coordinate conversion, but different points are correlate.

To understand this correlation further, it is suggested to study correlation, error distributions and statistical natures on the basis of taking correlation into consideration.

Key words: digitized data; conversion parameters; precision; correlation

About the author: HUANG Jiana, professor. Her major research orientation is geodetic data processing. Her typical achievements are estimation of variance components under the influence of the initial datum error; reliability analysis and gross error detection of traverse network.

E-mail: Huangjn16@hotmail.com