

导线网方差分量估计的综合研究

王仲锋¹

(1 长春工程学院地质与测绘工程系, 长春市同志街 80 号, 130021)

摘要: 提出方差分量估计的多余观测分量平均匹配公式; 总结出导线网方差分量估计定权的基本规律, 并给出其权增量循环算法和特征根法以及将两个实对称矩阵同时对角化的实用方法。

关键词: 导线网; 方差分量估计; 多余观测分量; 定权规律; 特征根法

中图法分类号: P207.1; P221.4

目前, Helmert、Forstener 和 Wlesch 公式是方差分量估计中常见的公式。Helmert 公式和 Forstener 公式虽然严密, 但存在求逆、多矩阵连乘再求迹等运算, 占用机器内存较多(尤其是解决大型问题), 实用上受到一定限制。Wlesch 公式虽然很简单, 但用它求解的方差分量是有偏的, 不具有良好的统计特性。为克服上述 3 个公式的缺陷, 本文提出一个近似公式——多余观测分量平均匹配公式。它和 Wlesch 公式一样简单, 但用它求解的方差分量却是其真值的一个无偏估计, 且适合于任何具有 m 类观测值的方差分量估计。

导线网目前仍然是应用广泛的一种平面控制形式。因此, 本文结合其特点, 研究了其方差分量估计的定权规律, 这对于编程和减少计算工作量均有重要意义。考虑到导线网在方差分量估计的循环计算中, 每次只改变边长观测值的权, 故根据文献 [1] 中“改变部分观测值对平差结果的影响”的有关算法, 提出了“权增量循环法”。文中导出的特征根法把 Helmert 公式中的多矩阵的复杂运算简化成了特征根之间的简单运算, 不但适于导线网, 而且适用于解决任何只有两类观测值的方差分量估计问题。当然, 也可用特征根简化 Forstener 公式。在将两个实对称矩阵对角化时, 本文提供的将求非对称矩阵的特征根问题转化成求对称矩阵的特征根问题的算法也是比较实用的。

1 导线网平差的函数模型

设角度观测值为 L_1 , 边长观测值为 L_2 , 相

应的权阵为 P_1, P_2 , 平差参数近似值的改正数为 δX , 则误差方程为:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \delta X - L_1 \\ V_2 &= A_2 \delta X - L_2 \end{aligned} \quad (1)$$

用式(1)做间接平差时, 法方程为:

$$N \delta X = U \quad (2)$$

式中,

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2, N_1 = A_1^T P_1 A_1, N_2 = A_2^T P_2 A_2 \\ U &= U_1 + U_2, U_1 = A_1^T P_1 L_1, U_2 = A_2^T P_2 L_2 \end{aligned} \quad (3)$$

解式(2)可得 δX , 并可用式(1)求 V_1, V_2 。

2 方差分量估计的基本思想和基本公式

以下结合导线网的特点, 给出只有两类独立观测量的方差分量估计的基本思想和基本公式, 同时提出一个新简化公式。

2.1 基本思想

设

$$\begin{aligned} D(L_1) &= \sigma_{01}^2 P_1^{-1} \\ D(L_2) &= \sigma_{02}^2 P_2^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

平差前, 先以某种方式定初权 P_1, P_2 进行预平差, 求出 V_1, V_2 , 并求估计量 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 , 由式(4)求 $D(L_1)$ 和 $D(L_2)$, 由这两个方差估值再定权 P_1 和 P_2 , 再平差, 循环往复, 直至 $\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2$ 为止。

2.2 基本公式

文献[2]已经导出求解 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 的基本公式,

即 $S\theta = W_0$ (5)

式中,
$$S = \begin{bmatrix} A & \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) \\ \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) & B \end{bmatrix}$$
 (6)

$\theta = (\sigma_{01}^2 \quad \sigma_{02}^2)^T$ (7)

$W_0 = (V_1^T P_1 V_1 \quad V_2^T P_2 V_2)^T$ (8)

式中, $A = n_1 - 2\text{tr}(N_1 N^{-1}) + \text{tr}(N_1 N^{-1} N_1 N^{-1})$

$B = n_2 - 2\text{tr}(N_2 N^{-1}) + \text{tr}(N_2 N^{-1} N_2 N^{-1})$

文献[1]同时给出了求解 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 的 Forstener 公式

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i - \text{tr}(N_i N^{-1})} = \frac{V_i^T P_i V_i}{r_i}$$
 (9)

和 Welsch 公式

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i}$$
 (10)

式(9)中的 $r_i = n_i - \text{tr}(N_i N^{-1})$, 称为第 i 类观测值的多余观测分量。

2.3 方差分量估计的多余观测分量平均匹配公式

式(9)和式(10)都是为了简化计算而提出的简化公式, 同时还有周江文简化公式等。笔者在此也提出一个简化公式, 即多余观测分量平均匹配公式。

文献[1, 3]在研究控制网的可靠性指标时, 已经给出包含所有观测值可靠性信息的矩阵:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n_1} & \cdots & r_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn_1} & \cdots & r_m \end{bmatrix} = Q_{vv} P$$
 (11)

并已证明:

$$\sum_{i=1}^n r_{ii} = r = n - t$$
 (12)

由于受观测权和网形结构等因素的影响, 式(11)中主对角线上的元素 r_{ii} 并不完全相等。但作为可靠性设计的最理想的方案为:

$$r_{ii} = \frac{r}{n}$$
 (13)

即所有观测值均具有相同的多余观测分量。在方差分量估计中, 亦假定各观测值具有相同的多余观测分量, 那么式(9)中第 i 类观测值(共有 n_i 个)的多余观测分量 r_i 为:

$$r_i = n_i \frac{r}{n} = n_i - \frac{n_i}{n} t$$
 (14)

则式(9)变为:

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i(1 - t/n)}$$
 (15)

由于式(15)是利用了把总的多余观测测量 r 平均匹配给每一个观测值导出的, 故称为多余观测分量平均匹配公式。该式和式(10)一样简单, 并且, 它不但适用于只有两类独立观测量的方差分量估计, 而且也适用于具有 m 类独立观测量的方差分量估计。尤为重要的是, 用式(15)估计的 σ_{0i} 是其真值 σ_0 的一个无偏估计(用式(10)估计的结果是有偏的)。这是因为, 当 $\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2 = \cdots = \sigma_{0m}^2 = \sigma_0^2$ 时,

$$\begin{aligned} (1 - t/n)(n_1 \sigma_{01}^2 + n_2 \sigma_{02}^2 + \cdots + n_m \sigma_{0m}^2) &= \\ (1 - t/n) \sigma_0^2 (n_1 + n_2 + \cdots + n_m) &= (n - t) \sigma_0^2 = \\ (V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2 + \cdots + V_m^T P_m V_m) &= V^T P V \end{aligned}$$
 即 $\sigma_0^2 = V^T P V / (n - t)$

3 导线网方差分量估计的综合研究

3.1 导线网方差分量估计定权的基本规律

用方差分量估计求解导线网时, 权的变化有其固有的规律, 如表 1 所示。为了书写方便和层次清晰, 表中的 P_{1j} 表示 L_1 中第 j 个观测值的权, 以 P_{2j} 和 d_{2j} 分别表示 L_2 中第 j 个观测值的权和方差估值, 并用 d_{01} 、 d_{02} 分别代表 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 , 用上角标 i 表示第 i 次循环。

从表 1 中可以看出, L_1 中各观测值的权始终取单位权, L_2 中第 j 个观测值在第 i 次循环中的权 $P_{2j}^{(i)}$ 和其初始值 $P_{2j}^{(0)}$ 的关系为:

$$P_{2j}^{(i)} = \frac{d_{01}^{(i)} d_{01}^{(i-1)} \cdots d_{01}^{(1)}}{d_{02}^{(i)} d_{02}^{(i-1)} \cdots d_{02}^{(1)}} P_{2j}^{(0)}$$
 (16)

若令

$$k_{i-1} = \frac{d_{01}^{(i-1)} \cdots d_{01}^{(1)}}{d_{02}^{(i-1)} \cdots d_{02}^{(1)}}, k_i = \frac{d_{01}^{(i)}}{d_{02}^{(i)}} k_{i-1}$$
 (17)

则有:

$$P_{2j}^{(i)} = k_i P_{2j}^{(0)} = \frac{d_{01}^{(i)}}{d_{02}^{(i)}} k_{i-1} P_{2j}^{(0)}$$
 (18)

当 $d_{01}^{(i)} / d_{02}^{(i)} = 1$ 时, 循环过程结束, 此时定出的权为合理的权。

就 L_1 、 L_2 的权阵 P_1 、 P_2 而言, 在第 i 次循环中, 亦可写为:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^{(i)} = E \\ P_2 &= P_2^{(i)} = k_i P_2^{(0)} \end{aligned}$$
 (19)

可见, P_1 始终为一单位阵。 i 一定时, P_2 是一个常数 k_i 与其初始值的乘积。

表 1 导线网方差分量估计权变化表

Tab.1 The List of Weights Changing in Variance Components Estimate of Traverse Nets

循环次数	d_{01}, d_{02} 的取值	P_{1j}, P_{2j} 的取值	由式(5)等求解的 d_{01}, d_{02}	d_{2j} 的解
0	$d_{01} = d_{01}^{(0)}$	$P_{1j} = P_{1j}^{(0)} = \frac{d_{01}^{(0)}}{d_{01}^{(0)}} = 1$	$d_{01} = d_{01}^{(1)}$	$d_{2j}^{(1)} = \frac{d_{02}^{(1)}}{P_{2j}^{(0)}}$
	$d_{02} = d_{01}^{(0)}$	$P_{2j} = P_{2j}^{(0)} = \frac{d_{01}^{(0)}}{d_{02}^{(0)}}$	$d_{02} = d_{02}^{(1)}$	
1	$d_{01} = d_{01}^{(1)}$	$P_{1j} = P_{1j}^{(1)} = \frac{d_{01}^{(1)}}{d_{01}^{(1)}} = 1$	$d_{01} = d_{01}^{(2)}$	$d_{2j}^{(2)} = \frac{d_{02}^{(2)}}{P_{2j}^{(1)}}$
	$d_{02} = d_{02}^{(1)}$	$P_{2j} = P_{2j}^{(1)} = \frac{d_{01}^{(1)}}{d_{02}^{(1)}} P_{2j}^{(0)}$	$d_{02} = d_{02}^{(2)}$	
...
i	$d_{01} = d_{01}^{(i)}$	$P_{1j} = P_{1j}^{(i)} = \frac{d_{01}^{(i)}}{d_{01}^{(i)}} = 1$	$d_{01} = d_{01}^{(i+1)}$	$d_{2j} = \frac{d_{02}^{(i+1)}}{P_{2j}^{(i)}}$
	$d_{02} = d_{02}^{(i)}$	$P_{2j} = P_{2j}^{(i)} = \frac{d_{01}^{(i)}}{d_{02}^{(i)}} \frac{d_{01}^{(i-1)}}{d_{02}^{(i-1)}} \dots \frac{d_{01}^{(1)}}{d_{02}^{(1)}} P_{2j}^{(0)}$	$d_{02} = d_{02}^{(i+1)}$	

在以下的讨论中,为书写方便,在不致于引起混淆的情况下,总是将 k_i 写成 k , $P_2^{(i)}$ 写成 P_2 , $P_2^{(0)}$ 写成 P_{20} 。则式(19)又可写成:

$$P_1 = E$$

$$P_2 = kP_{20} = P_{20} + (k-1)P_{20} = P_{20} + \Delta P \quad (20)$$

式中,

$$\Delta P = (k-1)P_{20} \quad (21)$$

3.2 导线网方差分量估计的权增量循环法

由方差分量估计的基本过程知,每次重新定权后需重新组成法方程和进行平差计算等。然而,由式(20)知,在每次循环中,只是改变了 L_2 的权。以下结合导线网方差分量估计中 P_2 的变化特点,根据“改变部分观测值的权对平差结果的影响”的有关算法,笔者总结出导线网方差分量估计的权增量循环算法。

文献[1]给出了改变观测值 L_2 的权对平差结果的影响的有关算法,以下不加推证地给出有关结果。

设 L_2 的初权 P_{20} 的增量为 ΔP , 由此引起 δX (根据 P_{20} 求解的 δX) 的变化值为 ΔX , V_{10}, V_{20} (根据 P_{20} 求解的 V_1, V_2) 变成 V_1, V_2 , 则有:

$$\begin{aligned} \Delta X &= -N_0^{-1} A_2^T G^{-1} V_{20} \\ \delta X &= \delta X_0 + \Delta X \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q_{xx} = N_0^{-1} - N_0^{-1} A_2^T G^{-1} A_2 N_0^{-1}$$

和

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{10} + A_1 \Delta X = V_{10} - M_1 G^{-1} V_{20} \\ V_2 &= V_{20} + A_2 \Delta X = V_{20} - M_2 G^{-1} V_{20} \end{aligned} \quad (23)$$

式中,

$$G = A_2 N_0^{-1} A_2^T + \Delta P^{-1} = M_2 + \Delta P^{-1} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} N_0 &= N_{10} + N_{20}, N_{10} = A_1^T A_1, N_{20} = A_2^T P_{20} A_2 \\ M_1 &= A_1 N_0^{-1} A_2^T, M_2 = A_2 N_0^{-1} A_2^T \end{aligned} \quad (25)$$

由于 A_1, A_2, P_{20}, V_{10} 和 V_{20} 是预知的,所以,只要给出 ΔP (确切地说,只要给定 k),便可求出上式中的各量。表 2 给出了导线网方差分量估计的权增量循环算法的过程。

对此过程需作如下说明:①因 $G^{-1} = (M_2 + \Delta P^{-1})^{-1} = \Delta P (\Delta P M_2 + E)^{-1}$, 故当 $\Delta P = 0$ 时, $G^{-1} = 0$; ②当用式(10)或式(15)求解 d_{01}, d_{02} 时,表 2 中计算 N_1, N_2, N 是多余的; ③要使 $d_{01}^{(i)} / d_{02}^{(i)} = 1$ 往往很困难,通常是规定一个取值区间(如取 $0.99 \leq d_{01}^{(i)} / d_{02}^{(i)} \leq 1.01$ 等)作为循环终止的条件。

3.3 导线网方差分量估计的特征根法

利用式(5)求解 d_{01}, d_{02} 是严密的。但是,每次循环时, S 阵中存在求逆、多矩阵的连乘和求迹运算,当导线网较大和循环次数较多时,既费时又占内存。以下结合导线网的特点,导出 S 阵的特征根表达式,以克服上述缺陷。

3.3.1 特征根表达式的推导

将 $N_1 = N - N_2$ 代入式(6),并令

$$\begin{aligned} a &= \text{tr}(N_2 N^{-1}) \\ b &= \text{tr}(N_2 N^{-1})^2 \end{aligned} \quad (26)$$

整理后得:

$$S = \begin{bmatrix} n_1 - t + b & a - b \\ a - b & n_2 - 2a + b \end{bmatrix} \quad (27)$$

因为

$$N = N_1 + N_2 = N_{10} + kN_{20} = N_0 + (k-1)N_{20} \quad (28)$$

以及 N_0 为 $t \times t$ 的实对称正定矩阵, N_{20} 为 $t \times t$ 的实对称阵,故根据线性代数理论(见文献[4]中

的 P_{289}) 知, 存在 $t \times t$ 的非退化阵 C , 可将 N_0 和 N_{20} 同时对角化, 且

$$\begin{aligned}
C^T N_0 C &= E \text{ 或 } N_0 = (C^T)^{-1} C^{-1} \\
C^T N_{20} C &= \Lambda \text{ 或 } N_{20} = (C^T)^{-1} \Lambda C^{-1}
\end{aligned}
\tag{29}$$

式中,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_t) \tag{30}$$

是特征根方程

$$|\lambda N_0 - N_{20}| = 0 \tag{31}$$

的特征根。又

$$N_2 N^{-1} = k N_{20} [N_0 + (k-1)N_{20}]^{-1}$$

将式(29)代入上式整理得:

$$N_2 N^{-1} = k (C^T)^{-1} \Lambda [E + (k-1)\Lambda]^{-1} C^T$$

顾及矩阵迹的性质, 即 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 得:

$$\begin{aligned}
a &= \text{tr}(N_2 N^{-1}) = k \text{tr}(\Lambda [E + \\
&(k-1)\Lambda]^{-1}) = k \sum_{i=1}^t \frac{\lambda_i}{1 + (k-1)\lambda_i} \tag{32}
\end{aligned}$$

同理可得:

$$b = \text{tr}(N_2 N^{-1})^2 = k^2 \sum_{i=1}^t \left[\frac{\lambda_i}{1 + (k-1)\lambda_i} \right]^2 \tag{33}$$

将式(32)、(33)代入式(27), 便可得 S 阵的特征根表达式。由于 N_0 、 N_{20} 是预知的, 故 λ_i 可预先解算出来。在后续的循环中, 只要给定 k , 便可方便地求出 S 阵中的元素, 从而避免了每次循环中均需进行矩阵的求逆、连乘和求迹运算。用同样的思路, 亦可将 Förstener 公式简化。

表 2 导线网方差分量估计的权增量循环过程

Tab.2 The Processes of Weights Increments Changing in Variance Components Estimate of Traverse Nets

循环次数	计算 d_{01}, d_{02}	计算 k	计算 N_1, N_2, N	计算 ΔP	计算 V_1, V_2	计算 $V_1^T P_1 V_1, V_2^T P_2 V_2$
0	$d_{01} = d_{01}^{(0)}$ $d_{02} = d_{02}^{(0)} = d_{01}^{(0)}$	$k = k_0 = \frac{d_{01}^{(0)}}{d_{02}^{(0)}} = 1$				
1	由式(5)或(9)、(10)、(15)求得 $d_{01} = d_{01}^{(1)}$ $d_{02} = d_{02}^{(1)}$	$k = k_1 = \frac{d_{01}^{(1)}}{d_{02}^{(1)}} k_0$		$\Delta P = (k-1)P_{20}$		$V_1^T P_1 V_1 = V_1^T V_1$ $V_2^T P_2 V_2 = k V_2^T P_{20} V_2$
2	由式(5)或(9)、(10)、(15)求得 $d_{01} = d_{01}^{(2)}$ $d_{02} = d_{02}^{(2)}$	$k = k_2 = \frac{d_{01}^{(2)}}{d_{02}^{(2)}} k_1$	$N_1 = N_{10}$ $N_2 = k N_{20}$ $N = N_1 + N_2$		$V_1 = V_{10} - M_1 G^{-1} V_{20}$ $V_2 = V_{20} - M_2 G^{-1} V_{20}$	
...				
i	由式(5)或(9)、(10)、(15)求得 $d_{01} = d_{01}^{(i)}$ $d_{02} = d_{02}^{(i)}$	$k = k_i = \frac{d_{01}^{(i)}}{d_{02}^{(i)}} k_{i-1}$				

3.3.2 特征根的计算

由式(31)知:

$$\begin{aligned}
|\lambda N_0 - N_{20}| &= |N_0| \cdot |\lambda E - N_0^{-1} N_{20}| = \\
&|\lambda E - N_{20} N_0^{-1}| \cdot |N_0| = 0
\end{aligned}$$

因 $|N_0| \neq 0$, 故 λ 可由特征根方程 $|\lambda E - N_0^{-1} N_{20}| = 0$ 或 $|\lambda E - N_{20} N_0^{-1}| = 0$ 求解。但由于 $N_0^{-1} N_{20}$ 或 $N_{20} N_0^{-1}$ 是非对称方阵, 其特征根不易求解。以下将构造一对称矩阵来求解 λ 。

因为 N_0 为正定对称方阵(其全部特征根大于 0), 故存在 $t \times t$ 的标准正交方阵 G (满足 $G^T G = G G^T = E$), 使

$$G^T N_0 G = \Lambda_0 \tag{34}$$

式中, Λ_0 为 N_0 的特征根所组成的对角阵。令

$$M = G \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \tag{35}$$

则 $M^T N_{20} M$ 仍为一实对称方阵, 故同样存在

$t \times t$ 的标准正交矩阵 Φ (满足 $\Phi^T \Phi = \Phi \Phi^T = E$), 使

$$\Phi^T (M^T N_{20} M) \Phi = \Lambda \tag{36}$$

$$\text{若令 } C = M \Phi \tag{37}$$

显然有:

$$\begin{aligned}
C^T N_{20} C &= \Lambda \\
C^T N_0 C &= \Phi^T M^T N_0 M \Phi = \\
\Phi^T \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} G^T N_0 G \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \Phi &= E
\end{aligned}$$

故求实对称方阵 $M^T N_{20} M$ 的特征根, 即可获得式(29)中的 λ 。

就求中小型实对称矩阵的特征根和特征向量而言, 雅克比法是一种较好的方法, 它具有速度快、精度高等优点, 这方面的应用程序也比较成熟。

4 算 例

如图 1 所示的建筑方格网, 9 号点的坐标为 (1 200, 1 200), $\alpha_{98} = 0^{\circ}00'00''$, 边长及角度观测值如图中所注, 现用 7 种算法作方差分量估计。为节省篇幅, 略去中间过程, 仅将有关计算结果列入表 3。其中 Helmert 特征根和 Förstener 特征根分别表示用特征根简化的 Helmert 法和 Förstener 法。

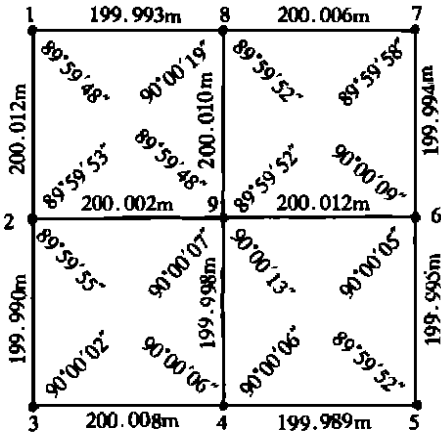


图 1 建筑方格网

Fig. 1 Square Control Network

表 3 7 种方法计算结果比较一览表

Tab. 3 The List of Results on 7 Kinds of Methods

使用公式	迭代次数	参考机时 / s	估计结果	
			σ_{01}^2	σ_{02}^2
Helmert	13	76	4.97	4.97
Förstener	6	31	4.97	4.97
Wlesch	10	43	2.99	2.99
多余观测均配	10	43	4.39	4.39
权增量循环	13	50	4.97	4.97
Helmert 特征根	13	54	4.97	4.97
Förstener 特征根	6	31	4.97	4.97

从表 3 可以看出, Helmert、Förstener、权增量循环和特征根法估计的结果完全一致, 因为它们都是严密方法, 只是迭代次数和花费的时间不一致, 当然占用的内存也不一致。多余观测分量平均匹配法的迭代次数和花费机时与 Wlesch 法一致, 但前者的估计结果更接近严密估计的结果, 且是无偏的, 它占用的内存当然也和 Wlesch 法一样是最少的。还需说明的是, 特征根法包括了计算特征根的时间。

5 结 语

本文依据可靠性设计思想提出的“方差分量估计的多余观测分量平均匹配公式”是介于 Förstener 和 Wlesch 公式之间的一个公式, 总结出的“导线网方差分量估计定权的基本规律”适合所有只有两类独立观测值而其中一类取单位权的方差分量估计; “导线网方差分量估计的权增量循环算法”可省去每次循环均需组成法方程等若干步骤; “导线网方差分量估计的特征根法”更适合于中小型导线网的方差分量估计问题。

致谢: 本文得到武汉大学测绘科学与技术学院陶本藻教授的指导和支, 在此表示感谢!

参 考 文 献

- 1 陶本藻. 测量数据统计分析. 北京: 测绘出版社, 1992
- 2 武汉测绘科技大学测量平差教研组编. 测量平差基础 (第三版). 北京: 测绘出版社, 1996
- 3 周秋生. 测量控制网优化设计. 北京: 测绘出版社, 1992
- 4 杨维权, 刘兰亭, 林鸿洲. 多元统计分析. 北京: 高等教育出版社, 1989

作者简介: 王仲锋, 教授. 现主要从事测绘教学和平差理论方面的研究. 代表成果: 主持完成了《用主成分估计求解秩亏网的研究》等科研成果. 发表论文 20 余篇.

E-mail: zfw6060@21cn.com

Synthetical Study to Estimate the Variance Components of Traverse Nets

WANG Zhongfeng¹

(1 Dept. of Geology & Surveying, Changchun Institute of Technology, 80 Tongzhi Street, Changchun, China, 130021)

Abstract: This paper gives the function model to estimate the variance components of traverse nets, narrates the basic processes of variance components estimate simply, and enumerates the formulae to estimate the variance components in common use. Supposing every measured values have

the same redundant observation components, a new simplified formula to estimate variance components is advanced. In Tab. 1, the changing law of weights of observed values is depicted when calculating the traverse nets by variance components estimate, d_{01} and d_{02} stand for σ_{01}^2 and σ_{02}^2 respectively, and $\mathbf{P}_{1j}^{(i)}$ and $\mathbf{P}_{2j}^{(i)}$ stand for the weights of j th observed value of traverse angles and legs respectively in the calculation of i th time. In Eqs. (19) and (20), \mathbf{P}_1 and \mathbf{P}_2 stand for weights matrix of observed values of traverse angles and legs respectively, $\mathbf{P}_2^{(0)} = \mathbf{P}_{20}$ stands for the initial value of \mathbf{P}_2 , $k_i = k$ can be calculated by Eq. (17).

Because only the weights of traverse legs are changed in every circulate processes to estimate the variance components of traverse nets, a circulate calculating method to use the increments of weights is summed up, and the related formulae are Eqs. (22) to (25), as well as the whole circulate calculating processes are listed in Tab. 2. In the formulae or Tab. 2, V_{10} and V_{20} stand for the corrections of traverse angles and legs calculated by initial weights matrix respectively, and the weights increments matrix $\Delta\mathbf{P}$ comes from Eq. (21). the circulate calculating method to use the weights increments has an obvious advantage, which is that the normal equations do not need constituted in every circulate processes.

There are many continued multiplication and inversion and finding trace of matrices in Helmert's formula. These calculations not only are complicated but also need a lot of store space for computer. So this paper also advances the characteristic roots method to estimate the variance components of traverse nets. This method makes complicated calculations between matrices in Helmert's formula become into the simple calculations between characteristic roots. Besides, the calculation for characteristic roots is only needed once. In line with the same thought, Förstener's formula can be simplified too. The calculated method about the characteristic roots can be found from Eqs. (34) ~ (37).

At the end of this paper, a calculated example is given. It is used to prove that the new method to estimate the variance components is effective. Advancing a new simplified formula and the characteristic roots method for variance components estimate, summing up the basic law to calculate the weights of the observed values for traverse nets in the processes of variance components estimate and the method to calculate the variance components of traverse nets using the weights increments are the main achievements in the paper. Supplying a practical method to make two real and symmetric matrices become into two diagonal matrices together may be another achievement of this paper.

Key words: traverse nets; variance components estimate; redundant observation components; law to calculate weights; characteristic roots method

About the author: WANG Zhongfeng, professor. He is now studying adjustment computation theory of surveying. He finished "The Research in Adjusting Rank Defect Free Nets by Principal Components Estimate". His published papers are more than 20.

E-mail: zfw6060@21cn.com