

# $\hat{a}$ trous 小波分解在边缘检测中的应用

张晓东<sup>1</sup> 李德仁<sup>1</sup> 蔡东翔<sup>2</sup> 马洪超<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 深圳市住宅局, 深圳市红荔路莲花大厦, 518000)

**摘要:** 讨论了  $\hat{a}$  trous 小波分解的原理及进行边缘检测的方法。利用一幅 SPOT 遥感图像进行了试验, 并与经典的 Sobel 算子和 Robert 算子处理的结果进行了比较。结果表明, 其性能在某些方面具有明显的优越性, 并具有一定的抗噪声能力。同时, 讨论了本文所述方法需要进一步改进的地方。

**关键词:** 小波分解; 边缘检测;  $\hat{a}$  trous 小波分解

**中图分类号:** P231.5

图像的边缘可以被定义为在局部区域内图像特性的差别, 它表现为图像上的不连续性(如表现在图像上灰度级的突变、纹理结构的突变以及色彩的变化等)。图像的边缘信息无论是对人类还是对机器视觉来说都是非常重要的。边缘具有能勾画出区域的形状、能被局部定义以及能传递大部分图像信息等优点, 因此, 边缘检测可以看作是处理许多复杂问题的关键, 它在图像分割、特征提取、图像识别等领域起着重要的作用。一般边缘检测常用的算子有梯度算子、Laplace 算子、LOG 算子、Sobel 算子、Prewitt 算子、Robert 算子等非线性算子。然而梯度算子类似于高通滤波, 仅仅起到锐化图像边缘的作用, 因而这些以微分为基础的线性算子对遥感图像这类地物复杂的图像其边缘检测效果有时不是很好; Sobel 算子是一种加权平均算子, 对靠近中心的点进行加权以突出边缘; Robert 梯度算子对噪声很敏感, 故很少采用这种方法检测稠密点区域的边缘; Laplace 算子检测边缘是旋转不变的, 即各向同性, 它虽对边缘有响应, 但对拐角、线端点和孤立点有更强的响应; LOG 算子在图像进行差分运算之前, 先对图像进行平滑处理, 以减少噪声, 因此, 缓解了一般差分对噪声响应很敏感的问题, 但其对边缘检测的效果受到了影响(因为其事先对图像进行了平滑处理)。从以上分析可以看出, 涉及方向性的算子各向不同性, 在图像较复杂和细节较丰富时, 难以检

测出图像的边缘。另外, 当图像中含有噪声时, 上述算子直接处理的效果更不理想(因为 LOG 算子事先对图像进行了平滑处理, 所以边缘检测效果不是很好)。鉴于此, 本文将小波分解的方法应用于边缘检测中, 以期检测结果有所改进。

## 1 $\hat{a}$ trous 小波分解

### 1.1 小波变换

小波分析已经在图像处理领域得到了成功的应用。小波变换提供了一种把图像分解成一系列具有不同分辨率的新图像的方法。

设函数  $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$  ( $L^2(\mathbf{R})$  为平方可积空间), 且  $\psi(x)$  满足

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (1)$$

或 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2)$$

式中,  $\psi(\omega)$  是  $\psi(x)$  的傅立叶变换。

当  $\psi(x)$  满足式(1)或式(2)时, 并且能较快地收敛时, 称  $\psi(x)$  为基本小波。 $\psi(x)$  经过伸缩  $a$  和平移  $b$  后得:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (3)$$

式中,  $a, b \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ ;  $\psi_{a,b}(x)$  称为小波。

分布函数  $f(x)$  的小波变换定义为:

$$wf(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi[a^{-1}(x-b)] dx \quad (4)$$

式中,  $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ ;  $b \in \mathbf{R}$ ;  $\bar{\psi}(x)$  为  $\psi(x)$  的复共轭。

### 1.2 $\hat{a}$ trous 小波分解方法

上面介绍了连续小波变换的定义, 连续小波不能用来编程计算, 必须要离散化。连续小波变换的离散化方法有多种, 但是, 对于不同的问题不是所有的离散方法都有效。著名的 Mallat 分解方法利用正交基, 但是经过该方法变换后, 图像的大小发生了变化, 这种变化在一些图像处理过程中往往是不利的, 如模式识别、多源影像融合等。

为了使图像经过小波变换后尺寸大小不变, 笔者采用一种被称为  $\hat{a}$  trous 小波分解的方法把图像分解成不同的小波平面。 $\hat{a}$  trous 小波算法的基本思想是: 把信号或图像分解为不同频率通道上的近似信号和每一尺度下的细节信号, 该细节信号称为小波面, 其图像大小与原始图像尺寸相同。

对于一维信号  $C(x)$ , 假设  $\{C_0(x)\}$  为信号  $C(x)$  和尺度函数  $\phi(x)$  的标量积, 尺度函数实际上是一个低通滤波器。信号  $C(x)$  经过第一次滤波后得到  $C_1(x)$ ,  $w_1(x) = C_0(x) - C_1(x)$  包含这两个尺度之间的信息,  $w_1(x)$  称为第一小波面, 也是对应尺度函数小波变换的结果。而小波函数  $\psi(x)$  与尺度函数  $\phi(x)$  有如下关系:

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \phi(x) - \frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (5)$$

相邻的尺度之间相差两倍, 经过  $i$  次滤波后得到  $C_i(x)$  为:

$$C_i(x) = \sum_l h(l) \cdot C_{i-1}(x + 2^{i-1}l) \quad (6)$$

离散小波变换小波系数为:

$$w_i(x) = C_{i-1}(x) - C_i(x) \quad (7)$$

式中,  $w_i(x)$  为尺度  $i$  下的小波系数(小波面);  $C_i(x)$  为  $i$  尺度下的近似信号;  $h$  为低通滤波器, 它与尺度函数  $\phi(x)$  满足下列方程:

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_l h(l) \cdot \phi(x-l) \quad (8)$$

$\hat{a}$  trous 离散小波对信号进行分解, 生成一组相邻、分辨率不同的小波面  $\{w_i\}$  和近似信号之和。如果选择线性内插的尺度函数, 如图 1 所示, 即

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

可以算出  $h(-1) = 1/4$ ,  $h(0) = 1/2$ ,  $h(1) = 1/4$ , 得:

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \phi(x+1) + \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{4} \phi(x-1)$$

$$C_{i+1}(x) = \frac{1}{4} C_i(x-2^i) + \frac{1}{2} C_i(x) + \frac{1}{4} C_i(x+2^i)$$

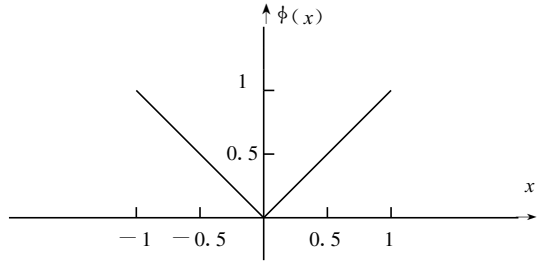


图 1 线性内插  $\phi(x)$

Fig. 1 Linear Interpolation  $\phi(x)$

与图 1 相对应的小波图形如图 2 所示。

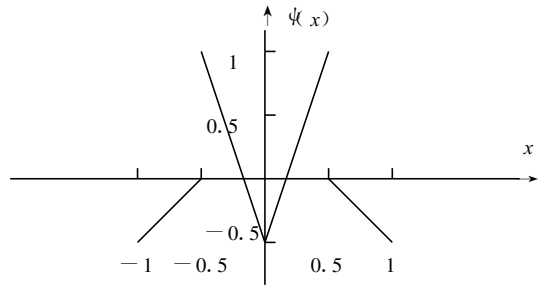


图 2 小波  $\psi(x)$

Fig. 2 Wavelet  $\psi(x)$

上述的  $\hat{a}$  trous 离散小波分解很容易推广到二维, 从而得到一个二维的  $3 \times 3$  的卷积算子:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

如果采用  $B_3$  样条尺度函数, 那么二维卷积算子为:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{128} & \frac{3}{32} & \frac{9}{64} & \frac{3}{32} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \end{bmatrix}$$

采用上述算子与图像进行卷积运算, 图像的大小不会发生变化。

## 2 边缘检测方法的实现

由上述分析可知, 利用  $\hat{a}$  trous 小波方法把图像分解成不同尺度下的小波面, 其中包含了该尺度下的图像轮廓细节信息。利用这一点可以按下述方法来实现对遥感图像的边缘检测。

- 1) 初始化  $i = 0$ , 输入原始图像  $f_i(x, y)$ ;
- 2) 用滤波器  $h(x, y)$  与图像  $f_i(x, y)$  进行卷积, 得到:

$$f_{i+1}(x, y) = f_i(x, y) * h(x, y)$$

- 3) 进行第一次小波变化, 得到第一个小波系数:

$$w_{i+1}(x, y) = f_i(x, y) - f_{i+1}(x, y)$$

- 4) 如果  $i < n$  ( $n$  为给定的分解次数),  $i = i + 1$ , 返回步骤 2);

- 5) 重复步骤 2)、3)、4) 直至  $i = n$ 。

本文对边界的处理采用镜像对称的方法, 即

$$f(-i, j) = f(i, j)$$

$$f(i+k, j) = f(i-k, j)$$

其中  $i \leq N, k = 1, 2, \dots, N$  为图像的总行数。

$$f(i, -j) = f(i, j)$$

$$f(i, j+k) = f(i, j-k)$$

其中  $j \leq N, k = 1, 2, \dots, N$  为图像的总列数。

在试验中取  $n = 3$ , 于是得到了 3 个小波面  $w_1, w_2, w_3$ , 将这 3 个小波面加起来就得到了一幅含有丰富高频信息而低频信息很少(低频信息主要包含在经小波变换后的近似图像中)的图像  $f'(x, y)$ 。由于  $f'(x, y)$  的强度较弱, 为了便于目视, 给  $f'(x, y)$  加一个灰度常量, 这样就得到了一幅边缘突出的图像, 从而实现了对遥感图像的边缘检测。

## 3 试验结果分析与结论

图 3 和图 4 分别是  $\hat{a}$  trous 小波分解方法和传统的两种算子在有噪声和无噪声两种情况下对遥感图像进行边缘检测的结果。图 3(a) 为原始的 SPOT 图像; 图 4(a) 是加了随机噪声的 SPOT 图像; 图 3(b)、3(c) 和 3(d) 分别是 Sobel 算子、Robert 算子和  $\hat{a}$  trous 小波分解方法对无噪声 SPOT 图像进行边缘检测的结果; 图 4(b)、4(c) 和 4(d) 分别是 Sobel 算子、Robert 算子和  $\hat{a}$  trous 小波分解方法对有噪声 SPOT 图像进行边缘检测的结果。比较图 3 的检测结果可以看出,  $\hat{a}$  trous 小波分解方法提取的明显边缘(原始图像中的两条路)比 Sobel 算子、Robert 算子提取的结果细且是



(a) 原始 SPOT 图像



(b) Sobel 算子



(c) Robert 算子



(d)  $\hat{a}$  trous 小波分解方法

图 3 SPOT 图像和边缘检测的结果

Fig. 3 SPOT Image and Detected Results

单边缘;对于图像右上角的一些细微的田块边缘, Sobel算子、Robert算子提取的结果中没有,而 $\hat{a}$  trous小波分解方法提取的结果中边缘比较明显。从总体上看, $\hat{a}$  trous小波分解方法提取的边缘较细,能够反映细微边缘信息,从图3可以对比发现,经典的Sobel和Robert算子对图像的边缘仅起到锐化作用。对比图4,原始图像图4(a)中的随机噪声在图4(b)和图4(c)中表现得比较突出,而在图4(d)中几乎没有表现出来,这表明在有噪声的情况下,传统的Sobel算子和Robert算子不能滤除噪声,对噪声较敏感,因此边缘检测的效果严重受噪声的影响,效果不佳。而 $\hat{a}$  trous小波分解方法可以在提取边缘的同时滤除噪声,从而获得较满意的结果。也就是说,该方法抗噪性较好,因为图像上较大的结构特征(无论其与背景的反

差是大还是小)在相邻的尺度上小波变换值变化不大,而噪声的小波变换值随着尺度的增大迅速衰减,所以选择适当的尺度就可以在检测边缘的同时抑制噪声。同时也可以发现,利用 $\hat{a}$  trous小波分解方法检测结果图像中边缘的强度较弱,另外,该方法检测的边缘与非边缘的背景图像反差较弱。如何更好地突出检测结果图像中的边缘信息,有待进一步探讨。

应用表明,用上述方法得到的结果图像经过一些特殊处理比较容易利用阈值对其进行二值化。另外,由于上述方法进行小波变换时图像的大小不变,用该方法得到的结果图像来替代相同大小低分辨率彩色图像的强度分量,可以提高图像分辨率,从而实现图像融合。试验证明上述应用的效果是比较理想的<sup>[3]</sup>。



(a) 加噪声的 SPOT 图像



(b) Sobel 算子



(c) Robert 算子



(d)  $\hat{a}$  trous 小波分解方法

图4 含有噪声的 SPOT 图像和边缘检测的结果

Fig. 4 SPOT Image Stained by Noise and Detected Results

## 参 考 文 献

- 1 崔锦泰. 小波分析导论. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995
- 2 王润生. 图像理解. 湖南: 国防科技大学出版社, 1995
- 3 陈延标, 夏良正. 数字图像处理. 北京: 人民邮电出版社, 1990
- 4 Núñez J, Fors X O, Prades A, et al. Multiresolution -

based Image Fusion with Additive Wavelet Decomposition. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999, 37(3): 1 204 ~ 1 210

作者简介: 张晓东, 博士生. 现从事摄影测量与遥感、地理信息系统研究. 主要成果: 参与设计开发深拖系统海底视像图像处理系统、遥感图像处理系统(GeoImager).

E-mail: zxd@regis.wtusm.edu.cn

## $\hat{a}$ trous Wavelet Decomposition Applied to Detecting Image Edge

ZHANG Xiaodong<sup>1</sup> LI Deren<sup>1</sup> CAI Dongxiang<sup>2</sup> MA Hongchao<sup>1</sup>

(1 National Laboratory for Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing,  
Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 Shenzhen Residential Bureau, Lianhua Building, Hongli Road, Shenzhen, China, 518000)

**Abstract:** An image edge can be defined as the difference of image features in a local region, and its appearance is the mutation of image gray or texture structure or color. Image edges are very important to human being and machine vision, because they can transfer the most information of an image. Detecting image edge is considered as a key step in many complicated processing methods like image segmentation, image recognition and feature extraction. In this paper, some classic methods are discussed and the  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition applied to detecting image edge is discussed based on the wavelet decomposition theory in detail. The  $\hat{a}$  trous decomposition is one of discrete wavelet transform algorithms. On the basis of  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition theory a detecting image edge method is derived, according to which the image can be decomposed into wavelet planes of increasing scales and the wavelet planes have the same number of pixels as the original image. An algorithm of detecting image edge based on  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition, which is suitable for computer program is presented. We use the method, Sobel and Robert algorithms to process the same SPOT image. Comparing the results, we can find that the main edges which are detected by the  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition method from the origin SPOT image are better than those obtained by Sobel or Robert method. We also note that the new detecting image edge algorithm can gain more tiny edge information than the other two methods. When the original image is stained by noise, the detecting image edge algorithm on basis of the  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition is not disturbed mostly, but Sobel and Robert algorithms are sensitive to noise. We have applied the algorithm which is presented for detecting image edge to getting binary image, and the result is satisfactory. So, the algorithm is better than the other two methods in some aspects, especially applied to original images which are stained by noise.

**Key words:** wavelet decomposition; detecting image edge;  $\hat{a}$  trous wavelet decomposition

---

**About the author:** ZHANG Xiaodong, Ph.D candidate. His interest fields are photogrammetry and remote sensing and GIS. His main achievements are the deep-sea floor pictures image processing system and Geolmager for processing remote sensing images.

E mail: zxd@rcgis.wtusm.edu.cn