DOI:10.13203/j.whugis2000.04.015
第25卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.25 No.4
2000年8月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Aug. 2000

文章编号:1000-050X(2000)04-0358-61

非线性模型平差中单位权方差的估计*

王新洲[1]

(1 武汉测绘科技大学科学技术处,武汉市珞喻路129号,430079)

摘 要 导出了非线性模型平差中单位权方差的严密估计公式,证明了线性模型平差中单位权方差的估计公式是其特例,给出了在实际工作中用近似公式代替严密公式的理论根据。

关键词 非线性模型;单位权方差;残差

分类号 P207 文献标识码 A

科学技术的飞速发展,使得现代测绘中数据采集越来越方便,观测数据的精度越来越高,因此给测量数据处理提出了更高的要求。过去那种线性近似的方法难以满足要求,于是非线性模型参数估计得到了广泛的研究[1~8]。这些研究广泛涉及非线性模型参数估计的估计理论、具体算法和误差传播,但对精度评定中的关键量——单位权方差的研究始终未涉及到,致使非线性模型参数估计理论残缺不全。为了弥补这一不足,本文应用残差向量 $\boldsymbol{V}$ 的展开式及其期望和方差,导出了非线性模型参数估计中单位权方差的严密估计公式,从而填补了非线性模型参数估计理论中的空白。

1 残差向量 $\boldsymbol{V}$ 的展开式及其期望和方差

由文献[9]知,残差向量 $\boldsymbol{V}$ 的二次型 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 中含有单位权方差的信息。要从 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 中提取单位权方差的信息,先要导出非线性最小二乘估计中残差向量 $\boldsymbol{V}$ 的展开式及其期望和方差。为此,设非线性模型为:

$$\boldsymbol{L}=f(\boldsymbol{X})+\Delta \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{L}$ 为 $n\times 1$ 的观测值向量;$\boldsymbol{X}$ 为 $t\times 1$ 的参数真值向量,且 t 个参数相互独立;Δ 为 $n\times 1$ 的真误差向量。

假设 Δ 为同精度独立正态随机误差,且非线性模型式(1)满足文献[10]中的正则条件,则残差向量 $\boldsymbol{V}$ 可展开为:

$$\boldsymbol{V}=\Delta f-\Delta=-\boldsymbol{N}\lambda+\boldsymbol{Q}[\lambda^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{G}]\tau+\frac{1}{2}\boldsymbol{N}(\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\tau)+o_t(\boldsymbol{n}^{-1}) \tag{2}$$

式中,
$$\Delta f=f(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Q}\tau+\boldsymbol{Q}[\lambda^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{G}]\tau+\frac{1}{2}(\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\tau)+o_t(\boldsymbol{n}^{-1}) \tag{3}$$

$\boldsymbol{N}$ 由下式确定:

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{N})\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{QR}$$

其中,
$$\boldsymbol{B}=\frac{\partial f(X)}{\partial X},\ \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{4}$$

$\boldsymbol{G}$ 为固有曲率立体阵[1],由下式确定:

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{U}]$$

其中,[][]表示立体阵的方括号乘积。立体阵 $\boldsymbol{U}$ 由下式确定:

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WM},\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}^{-1},\ \boldsymbol{W}=\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} \tag{5}$$

$$\tau=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Delta,\ \lambda=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\Delta \tag{6}$$

$o_t(\boldsymbol{n}^{-1})$ 为高阶无穷小。

由式(2)和式(3)知,$\boldsymbol{V}$ 与 Δf 仅与非线性模型的固有曲率有关,故在参数变换下 $\boldsymbol{V}$ 与 Δf 保持不变。

对式(2)两边取数学期望,得:

$$E(\boldsymbol{V})=-\boldsymbol{N}\mathrm{E}(\lambda)+\boldsymbol{Q}E([\lambda^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{G}]\tau)+\frac{1}{2}\boldsymbol{N}E(\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\tau)+o_t(\boldsymbol{n}^{-1}) \tag{7}$$

因为 $E(\lambda)=E(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\Delta)=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}E(\Delta)=0$,且可以证明:

$$E([\lambda^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{G}]\tau)=0,\ E(\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\tau)=\sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{G})$$

所以,残差向量 $\boldsymbol{V}$ 的数学期望为:

收稿日期:2000-03-07.

*国家自然科学基金资助项目(49874002);国家测绘局测绘科技发展基金资助项目(99010)。

$$E(V)=\frac{\sigma^2}{2}N\mathrm{tr}(G)+o_t(n^{-1}) \tag{8}$$

对式(2)的两边取方差, 得:

$$\mathrm{var}(V)=\mathrm{var}(N\lambda)+\mathrm{var}(Q[\lambda^{\mathrm{T}}][G]\tau)+\frac{1}{4}\mathrm{var}(N(\tau^{\mathrm{T}}G\tau))+\text{交叉项} \tag{9}$$

可以证明交叉项都为零。

又由协方差传播定律知:

$$\mathrm{var}(N\lambda)=N\mathrm{var}(\lambda)N^{\mathrm{T}}=N\mathrm{var}(N^{\mathrm{T}}\Delta)N^{\mathrm{T}}=\sigma^2NN^{\mathrm{T}}NN^{\mathrm{T}}=\sigma^2NN^{T}=\sigma^2P_N \tag{10}$$

$$\mathrm{var}(Q[\lambda^{\mathrm{T}}][G]\tau)=Q\mathrm{var}([\lambda^{\mathrm{T}}][G]\tau)Q^{\mathrm{T}}=\sigma^4QA_GQ^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

式中, $A_G=\sum_{s=1}^{n-1}G_s^2$, G_s 为固有曲率立体阵 G 的第 s 层。

$$\frac{1}{4}\mathrm{var}(N(\tau^{\mathrm{T}}G\tau))=\frac{1}{4}N\mathrm{var}(\tau^{\mathrm{T}}G\tau)N^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\sigma^4N(\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{t}G_{kl}G_{kl}^{\mathrm{T}})N^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\sigma^4NA_G^{*}N^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式中, $A_G^{*}=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{t}G_{kl}G_{kl}^{\mathrm{T}}$。以上推导用到了

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}([\lambda^{\mathrm{T}}][G]\tau)=\sigma^4A_G\\&\mathrm{var}(\tau^{\mathrm{T}}G\tau)=2\sigma^4A_G^{*}\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)的证明参见文献[10]。

将式(10)～式(12)代入式(9), 得残差向量 V 的方差为:

$$\mathrm{var}(V)=\sigma^2P_N+\sigma^4(QA_GQ^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}NA_G^{*}N^{\mathrm{T}}) \tag{14}$$

2　单位权方差 σ^2 的估值

由式(14)知, 残差向量 V 的方差中含有单位权 σ^2 的信息, 所以仍与线性模型一样, 用残差平方和 $V^{\mathrm{T}}V$ 来估计单位权方差 σ^2, 为此, 对残差平方和 $V^{\mathrm{T}}V$ 取数学期望。二次型 $V^{\mathrm{T}}V$ 的数学期望[9]为:

$$E(V^{\mathrm{T}}V)=(E(V))^{\mathrm{T}}(E(V))+\mathrm{tr}(\mathrm{var}(V)) \tag{15}$$

略去式(8)中的无穷小量 $o_t(n^{-1})$, 可得:

$$\begin{aligned}(E(V))^{\mathrm{T}}(E(V))&=(\frac{\sigma^2}{2}N\mathrm{tr}(G))^{\mathrm{T}}\cdot(\frac{\sigma^2}{2}N\mathrm{tr}(G))=\frac{\sigma^4}{4}(\mathrm{tr}(G))^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}N\mathrm{tr}(G)\\&=\frac{\sigma^4}{4}(\mathrm{tr}(G))^{\mathrm{T}}\mathrm{tr}(G)=\frac{\sigma^4}{4}\|\mathrm{tr}(G)\|^2\end{aligned} \tag{16}$$

再对式(14)求迹, 得:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{var}(V))&=\sigma^2\mathrm{tr}(P_N)+\sigma^4\mathrm{tr}(QA_GQ^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}NA_G^{*}N^{\mathrm{T}})=\sigma^2\mathrm{tr}(\mathrm{I}-B(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}})+\\&\sigma^4\mathrm{tr}(A_GQ^{\mathrm{T}}Q+\frac{1}{2}A_G^{*}N^{\mathrm{T}}N)=\sigma^2(n-t)+\sigma^4(\mathrm{tr}(A_G)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_G^{*}))\end{aligned} \tag{17}$$

因为

$$\mathrm{tr}(A_G)=\sum_{e=1}^{n-1}\mathrm{tr}(G_e^2)=\sum_{e=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{t}G_{ekl}^2=\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\|G_{ke}\|^2$$

$$\mathrm{tr}(A_G^{*})=\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\mathrm{tr}(G_{ke}^{\mathrm{T}}G_{ke})=\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\|G_{ke}\|^2$$

于是有:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{var}(V))=\sigma^2(n-t)+\frac{3}{2}\sigma^4\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\|G_{ke}\|^2 \tag{18}$$

将式(16)、(18)同时代入式(15), 得:

$$E(V^{\mathrm{T}}V)=\sigma^2(n-t)+\sigma^4(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\|G_{ke}\|^2+\frac{1}{4}\|\mathrm{tr}(G)\|^2) \tag{19}$$

去掉式(19)中的数学期望, 用估值 $\hat{\sigma}^2$ 代替真值 σ^2, 顾及 $r=n-t$。并令

$$a=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{t}\|G_{ke}\|^2+\frac{1}{4}\|\mathrm{tr}(G)\|^2 \tag{20}$$

可得:

$$a\hat{\sigma}^4+r\hat{\sigma}^2-V^{\mathrm{T}}V=0 \tag{21}$$

式(21)就是非线性模型参数估计中单位权方差的估计公式, 它是关于估值 $\hat{\sigma}^2$ 的一元二次方程。

当模型(1)为线性模型时, 有 $G=0$。此时式(21)变为:

$$r\hat{\sigma}^2-V^{\mathrm{T}}V=0$$

故有

$$\hat{\sigma}^2=\frac{V^{\mathrm{T}}V}{r}=s^2 \tag{22}$$

式(22)正是线性模型中单位权方差的估计公式。这就从另一个角度说明了式(21)的正确性。

当模型(1)为非线性模型时, $G\neq0$, 故 $a\neq0$。此时可应用解一元二次方程的公式法解式(21), 即

$$\hat{\sigma}^2=\frac{-r\pm\sqrt{r^2+4aV^{\mathrm{T}}V}}{2a} \tag{23}$$

式(23)有两个根。因为 $a>0$, $r>0$, $V^{\mathrm{T}}V>0$, 所以 $\hat{\sigma}^2=\frac{-r-\sqrt{r^2+4aV^{\mathrm{T}}V}}{2a}<0$, 这显然不符合实际, 应舍去。所以式(21)的解, 即非线性模型参数估计中单位权方差的严密估计公式为:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{-r+\sqrt{r^2+4aV^{\mathrm{T}}V}}{2a} \tag{24}$$

3 算例

非线性模型为 $L_i = e^{ix} + \Delta_i$，参数的真值 $X = -0.254\,136\,79$。同精度观测值列于表 1，估计单位权中误差。

表 1 观测值

Tab. 1 Observations

i	L_i	$\overline{L}_i$	Δ_i
1	0.79	0.775 585 702	0.014 414 298
2	0.61	0.601 533 181	0.008 466 819
3	0.45	0.466 540 535	−0.016 540 535

取 $X_0 = -0.255$，用高斯-牛顿法迭代 5 次，得：

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.775\,243 \\ 1.202\,004 \\ 1.397\,768 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -0.014\,756\,900 \\ -0.008\,998\,144 \\ 0.015\,922\,536 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0.775\,243 \\ 2.404\,007 \\ 4.193\,303 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{X} = -0.254\,578\,62$$

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = 0.000\,252\,274,\ \boldsymbol{R} = \sqrt{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}} = 1.999\,892$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^{-1} = 0.500\,027,\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{BM} = \begin{pmatrix} 0.387\,642 \\ 0.601\,034 \\ 0.698\,921 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0.100\,000 & -0.961\,371 \\ -0.781\,150 & 0.169\,006 \\ 0.616\,283 & 0.362\,911 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0.195\,995 \\ 0.304\,452 \end{pmatrix},\ a = 0.229\,434,\ r = 2$$

将 a、r、$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 代入式(24)，得：

$$\hat{\sigma}^2 = 0.000\,126\,135,\ \hat{\sigma} = \pm 0.011\,231$$

而
$$\sigma^2 = (\Delta^{\mathrm{T}}\Delta)/n = 0.000\,184\,349$$

$$\sigma = \pm 0.013\,577\,534$$

$$s^2 = (\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V})/r = 0.000\,276\,137$$

$$s = \pm 0.016\,617\,385$$

比较 s^2 与 $\hat{\sigma}^2$ 知，$s^2 > \hat{\sigma}^2$。这是因为，在非线性模型参数估计中，若仍用 $s^2 = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}/r$ 作为单位权方差的估值，有：

$$rs^2 - \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = 0 \tag{25}$$

式(25)减去式(21)，得：

$$r(s^2 - \hat{\sigma}^2) = a\hat{\sigma}^4 > 0 \tag{26}$$

式(26)表明 $s^2 > \hat{\sigma}^2$，即在非线性模型参数估计中，按近似式(25)估计单位权方差，其估值稍大于按严密公式(24)估计的结果。由算例可以看出，s^2 与 $\hat{\sigma}^2$ 相差甚微，而计算 s^2 的工作量远远小于计算 $\hat{\sigma}^2$ 的工作量，加之在实际中用 s^2 比用 $\hat{\sigma}^2$ 更安全，所以为了简单、保险起见，建议在实际工作中仍使用近似式(25)。

参 考 文 献

1 王新洲. 非线性模型线性近似的容许曲率. 武汉测绘科技大学学报, 1997, 22(2): 119~121

2 王新洲. 非线性模型参数估计的直接解法. 武汉测绘科技大学学报, 1999, 24(1): 64~67

3 王新洲. 非线性模型能否线性化的实用判据. 武汉测绘科技大学学报, 1999, 24(2): 145~148

4 胡圣武, 陶本藻. 非线性模型的误差传播及其在 GIS 中的应用. 武汉测绘科技大学学报, 1997, 22(2): 129~131

5 徐培亮. 非线性函数的协方差传播公式. 武汉测绘科技大学学报, 1986(2): 92~99

6 周世健. 广义方差-协方差传播律. 北京: 测绘出版社, 1996. 211~216

7 刘国林, 陶华学. 非线性观测值函数的协方差和协因数传播及其权倒数. 测绘工程, 1997, 6(2): 8~16

8 陶本藻. 非线性与线性平差偏差的分布特征. 测绘工程, 1998, 7(4): 7~12

9 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差(第二版). 北京: 测绘出版社, 1992

10 韦博成. 近代非线性回归分析. 南京: 东南大学出版社, 1989

王新洲, 男, 46 岁, 教授, 博士生导师。现从事测量数据处理理论与应用研究。代表成果: 垂直形变速率面的拟合理论与方法, 随机模型的估计理论和实用算法, 非线性模型参数估计理论, 模糊信息处理理论及其在测量中的应用。已发表论文 40 余篇。

E-mail: xzwang@wtusm.edu.cn

Estimation of the Unit Weight Variance in Nonlinear Model Adjustment

WANG Xinzhou[1]

(1　Science and Technology Office, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　In parameter estimation many models are nonlinear ones. The classical method dealing with these nonlinear models is linear approximation using the approximate value of parameter. Due to the fact that the difference of non-linearity between different nonlinear models, some nonlinear model can be linear approximation and the others can be not has been understand, the theory of parameter estimation for nonlinear model has been studied in many papers. But none studies the estimation of the unit weight variance in parameter estimation for nonlinear model. In parameter estimation for nonlinear model, how to estimate the unit weight variance ? This paper specially studies the problem. At first this paper gives the expanded formula expectations, and variance of residuals. Then according to the theoretical relationship of residuals and their expectation and their variance, the formula of the unit weight variance in parameter estimation for nonlinear model is presented. At last we give an example to explain how to use the formula.

Key words　nonlinear model; unit weight variance; residual

WANG Xinzhou, male, 46, professor, Ph. D supervisor. He is concentrated on the research and education in the theory and application of surveying data processing. His cardinal achievements include in the field the theory and method of deformation measurements, the theory and algorithm of estimation of stochastic, the parameter estimation theory of nonlinear. His published papers are more than 40.

E-mail: xzwang@wtusm. edu. cn

(上接第 352 页)

limiting quality of count selection is raised as the inspection scheme for production departments while the method of one time after-inspection average percent defective upper limit of count selection is proposed for acceptance departments. These two schemes are in agreement with exiting percent sampling inspection schemes in certain circumstances, and have the advantage that can be easily conducted . More contents and quality characteristics have been involved in the digital product in GIS, and the model of sampling inspections still need a further research. The result of the research can be used in different sampling levels and suited for variant and complex digital products, and ensure the reliability of sampling while make the fee of sampling minimum.

Key words　sampling inspection; digital products; GIS

LIU Dajie, male, 60, professor, Ph. D supervisor. His chief research aspects involve geodata analysis and research of spatial data quality in GIS. His recently typical achievement is "Accuracy Analysis and Quality Control of Spatial Data in GIS".

E-mail: Djliu@celiang. tongji. edu. cn