

采用双重投影法的椭球面日晷投影

桂波

(中国航海图书出版社, 天津市上海道 102 号, 300450)

摘要 研究了从地球椭球面描写到海图平面的采用双重投影法的日晷投影方程式, 并阐明了椭球面日晷投影的 3 个重要特性及其应用。

关键词 大椭圆; 共焦双曲线; 椭球面日晷投影

分类号 P282.1

1 椭球面日晷投影公式

1999 年 5 月 1 日实施的中华人民共和国国家标准《中国航海图编绘规范》, 规定制图区域 60% 以上的地区纬度高于 75° 时, 采用日晷投影。椭球面日晷投影公式的建立可以采用双重投影法^[1], 步骤如下:

1) 将地球椭球面描写到地心纬度球面上, 其投影公式为:

$$\begin{cases} \tan u = (1 - e^2) \tan \varphi \\ w = \lambda \end{cases} \quad (1)$$

式中, (u, w) 为大地坐标 (φ, λ) 相对应的球面坐标; e 为椭球第一偏心率。

令球半径 $R = r_0$ (r_0 为切点处的椭球动径), 则椭球面上的大椭圆可以投影成大圆。

2) 将地心纬度球面按中心透视投影描写到地图平面, 设切点纬度 φ_0 的地心纬度为 u_0 , 则以切点为平面直角坐标的原点, 其投影公式为^[2]:

$$\begin{cases} x = \frac{r_0(\tan u - \tan u_0 \cos w)}{\tan u \tan u_0 + \cos w} \\ y = \frac{r_0 \sec u_0 \sin w}{\tan u \tan u_0 + \cos w} \end{cases} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)可得^[3]:

$$\begin{cases} x = \frac{r_0(1 - e^2)(\tan \varphi - \tan \varphi_0 \cos \lambda)}{(1 - e^2)^2 \tan \varphi \tan \varphi_0 + \cos \lambda} \\ y = \frac{r_0[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \sin \lambda}{(1 - e^2)^2 \tan \varphi \tan \varphi_0 + \cos \lambda} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)即为采用双重投影法导出的椭球面日晷投影公式。

由于采用该双重投影法的第 1) 步对投影变形的控制十分严格, 这也是文献 [1] 作出的重要贡献。将球面缩小至通过日晷投影的切点, 也就是说, 球面与椭球面在切点上重合, 球的半径变为连接椭球面上切点与椭球中心的一条动径。对于大、中比例尺日晷投影制图, 从椭球面到地心纬度球面的描写中, 长度变形和方位角变形均可忽略不计, 采用双重投影法的椭球面日晷投影的长度变形公式与一般的球心透视方位投影相同^[4]。投影经纬线长度比为:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{k^2} \sqrt{1 - \cos^2 u_0 \sin^2 w} \\ n = \frac{1}{k^2} \sqrt{k^2 + \cos^2 u_0 \sin^2 w} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $k = \sin u \sin u_0 + \cos u \cos u_0 \cos w$ 。

椭球面日晷投影的最大角度变形 w 可以表示为:

$$\sin w/2 = (1 - k)/(1 + k) \quad (5)$$

面积比 P 为:

$$P = 1/k^3 \quad (6)$$

2 椭球面日晷投影的 3 个重要特性

特性 1 椭球面上的任何大椭圆均被投影成直线。

证明 将式(3)的第一式除以第二式得:

$$\frac{x}{y} = \frac{(1 - e^2)(\tan \varphi - \tan \varphi_0 \cos \lambda)}{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \sin \lambda} \quad (7)$$

解得: $\tan \varphi = \frac{x}{y} \cdot \frac{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \sin \lambda + 1 - e^2}{1 - e^2}$

$$\tan \varphi_0 \cos \lambda \tag{8}$$

将式(8)代入式(3)的第二式,得经线投影方程式:

$$y = \frac{\tan \lambda}{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}}} \cdot [r_0 - x(1 - e^2) \tan \varphi_0] \tag{9}$$

式(9)说明了椭圆面上的经线被投影成直线。

由式(9)可以得到投影反解式:

$$\tan \lambda = \frac{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} y}{r_0 - x(1 - e^2) \tan \varphi_0} \tag{10}$$

已知椭圆面上的大椭圆方程式^[3]为:

$$(1 - e^2) \tan \varphi = \cot A_0 \sin(\lambda - \lambda_0) \tag{11}$$

式中, A_0 为大椭圆与赤道交点处的大地方位角; λ_0 为该交点的地理经度。

由式(11)展开正弦函数得:

$$(1 - e^2) \tan \varphi = \cot A_0 (\sin \lambda \cos \lambda_0 - \cos \lambda \sin \lambda_0) \tag{12}$$

将式(8)代入式(12)得:

$$(1 - e^2) \tan A_0 \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}}}{1 - e^2} \tan \lambda + \tan \varphi_0 \right) = \tan \lambda \cos \lambda_0 - \sin \lambda_0 \tag{13}$$

将式(10)代入式(13),化简后得:

$$[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} y \cos \lambda_0 = r_0 [(1 - e^2) \tan A_0 \tan \varphi_0 + \sin \lambda_0] - x [(1 - e^2) \tan \varphi_0 \sin \lambda_0 - \tan A_0] \tag{14}$$

解得:

$$y = x \cdot \frac{\tan A_0 - (1 - e^2) \tan \varphi_0 \sin \lambda_0}{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_0} + \frac{r_0 [(1 - e^2) \tan A_0 \tan \varphi_0 + \sin \lambda_0]}{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_0} \tag{15}$$

由式(15)可知,大椭圆在椭圆面日晷投影中被表象为一条直线,其斜率为:

$$k = \frac{\tan A_0 - (1 - e^2) \tan \varphi_0 \sin \lambda_0}{[1 + (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_0}$$

特性 2 以切点为极的两组椭圆面双曲线族,投影后成为两组平面双曲线族。

证明 设地球椭圆面上 3 台站的位置为 $A(\varphi_1, \lambda_1)$ 、 $B(\varphi_2, \lambda_2)$ 、 $C(\varphi_3, \lambda_3)$, 在地心纬度球面上的投影点分别为 $A'(u_1, w_1)$ 、 $B'(u_2, w_2)$ 、 $C'(u_3, w_3)$ 。由于在地心纬度球面上,大圆是大椭圆的投影,方位角变形的最大值为 $0.6'^{[3]}$, 对于制图来说可以忽略不计,球面方位角 α 即可看作大地方位角 A , 故以切点 B' 为极的球面共焦双曲线可以看作是以 B 点为极的椭圆面共焦双曲

线的投影。

如图 1 所示, 设球面基线长 $B'A' = c_1$ 、 $B'C' = c_2$, 任一点 $M(u, w)$ 至 3 台站的球面距离分别为 r_1 、 r 和 r_2 , 球面距离差 $a_1 = r_1 - r$ 、 $a_2 = r_2 - r$, 则在球面三角形 $A'MB'$ 和 $B'MC'$ 中, 根据余弦定理可得:

$$\begin{cases} \cos a_1 = \cos c_1 + \tan r (\sin a_1 + \sin c_1 \cos \psi_1) \\ \cos a_2 = \cos c_2 + \tan r (\sin a_2 + \sin c_2 \cos \psi_2) \end{cases} \tag{16}$$

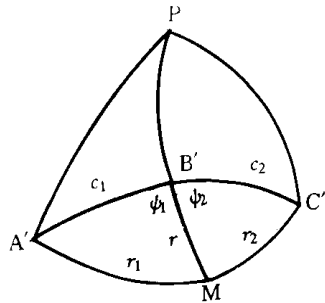


图 1 地心纬度球面上的共焦双曲线

Fig. 1 The Hyperbola of Common Focus of the Sphere Latitude of the Earth Core

式(16)是以 B' 为极的两条球面共焦双曲线方程式, 其焦距分别为 c_1 和 c_2 。

变换式(16), 得:

$$\begin{cases} \frac{\cos a_1 - \cos c_1}{\sin a_1} = \tan r \left(1 + \frac{\sin c_1}{\sin a_1} \cos \psi_1 \right) \\ \frac{\cos a_2 - \cos c_2}{\sin a_2} = \tan r \left(1 + \frac{\sin c_2}{\sin a_2} \cos \psi_2 \right) \end{cases} \tag{17}$$

令

$$P_1 = \frac{\cos a_1 - \cos c_1}{\sin a_1}, l_1 = \frac{\sin c_1}{\sin a_1} \tag{18}$$

$$P_2 = \frac{\cos a_2 - \cos c_2}{\sin a_2}, l_2 = \frac{\sin c_2}{\sin a_2}$$

可得到以极坐标形式表示的球面共焦双曲线^[6]:

$$\begin{aligned} P_1 &= \tan r (1 + l_1 \cos \psi_1) \\ P_2 &= \tan r (1 + l_2 \cos \psi_2) \end{aligned} \tag{19}$$

将式(19)的球面共焦双曲线映射到以 B' 点为切点的日晷投影平面上, 则球面双曲线上的点 $M(u, w)$ 在投影平面上的极坐标为:

$$\begin{cases} \rho' = \tan r \\ \alpha' = \alpha_{B'A'} - \psi_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \rho'' = \tan r \\ \alpha'' = \alpha_{B'C'} - \psi_2 \end{cases} \tag{20}$$

式中, $\alpha_{B'A'}$ 、 $\alpha_{B'C'}$ 分别为球面弧 $B'A'$ 、 $B'C'$ 的球面方位角。

式(19)在投影平面上的表象是以切点 B 为极点, 以直线 $B'A'$ 、 $B'C'$ 为极轴的平面共焦双曲

线族,即

$$\begin{cases} \rho' = P_1 / (1 + l_1 \cos \psi_1) \\ \rho'' = P_2 / (1 + l_2 \cos \psi_2) \end{cases} \quad (21)$$

由文献[7]可知,以 B 台站为切点的日晷投影制图,在纬度带 30° (或比例尺大于 $1:333$ 万) 的区域范围内,可以忽略从椭球面到地心纬度球面的长度变形,带内的距离和方位角均可看作无变形,故以切点为极的两组球面共焦双曲线可以直接视为椭球面上的共焦双曲线。式(21)证明了以切点 B 为极的两组椭球面共焦双曲线族被投影成两组平面共焦双曲线族。

特性 3 从切点出发至图上任意一点的方位角都与大地方位角相同。

这一特性可以根据切点的双重投影法证明:从椭球面投影到地心纬度球面,切点的球面方位角可以视为大地方位角,即 $\alpha = A$ 。从球面投影到切平面,根据方位投影的特点,过切点的经线与各垂直圈的夹角投影后保持不变,即 $\delta = \alpha$,故从切点出发至图上任意一点的方位角都与大地方位角一致,即 $\delta = A$ 。

3 椭球面日晷投影在海图上的应用

椭球面日晷投影在海图制图中的地位仅次于墨卡托投影。众所周知,大椭圆(代表大地线)是椭球面上两点之间的最短距离。船只在远洋航行时,如果使用墨卡托投影沿等角航线航行,则多走许多里程。为了提前到达目的地,最好的办法是沿大椭圆航线航行。由于大圆在球面日晷投影中

被描写为直线⁸,而大椭圆在椭球面日晷投影中被表象为直线,因此,在这种图上可以用直线直接标绘出两点间的大椭圆航线,从而使船只在远程航行时沿着大椭圆航线航行。

椭球面日晷投影的第 2 个特性可以用来制作无线电双曲线导航图,即在日晷投影海图上加绘双曲线定位格网,供船只在远洋航行中定位使用。第 3 个特性可以用来制作位于切点的雷达站、观测站、快艇基地及导弹发射基地等使用的专用海图,主要用于船只的测角定位法⁹。

参 考 文 献

- 1 华 棠. 大、中比例尺日晷投影地球半径的选择. 测绘学报, 1984, 13(2): 141 ~ 151
- 2 胡毓钺, 龚剑文. 地图投影(第二版). 北京: 测绘出版社, 1992. 65 ~ 71
- 3 丁佳波. 大椭圆表象为直线的日晷投影. 测绘通报, 1987(4): 34 ~ 36
- 4 华 棠. 海图教学基础. 海司航保部, 1985. 223 ~ 279
- 5 丁佳波. 地心纬度球面的性质. 军事测绘, 1988(3): 37
- 6 杨启和. 方位投影的研究. 见: 吴忠性, 胡毓钺主编. 地图投影论文集. 北京: 测绘出版社, 1983. 75 ~ 95
- 7 丁佳波. 关于任意性质双重投影球体半径的选择. 地图, 1991(4): 8 ~ 10
- 8 方炳炎. 地图投影学. 北京: 地图出版社, 1978. 124 ~ 157
- 9 彭光宇, 赵明才. 海洋测量定位与计算. 北京: 测绘出版社, 1993. 25 ~ 40

丁佳波, 男, 53 岁, 高级工程师, 现从事海图投影研究。

Ellipsoidal Gnomonic Projection by Double Projection Method

DING Jiabo

(China Navigation Chart Press, 102 Shanghai Street, Tianjin, China 300450)

Abstract Chinese Nautical Chart requests that gnomonic projection should be used if over 60% of the area latitude is over 75° . In this paper, the gnomonic projection equation from the earth ellipsoid to the surface of projection is derived by double projection method. The three important characteristics and application of the ellipsoidal gnomonic projection are described.

Key words great ellipse; hyperbola of common focus; ellipsoidal gnomonic projection