DOI:10.13203/j.whugis1999.04.015
第24卷第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.24 No.4
1999年12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1999

地图符号系统为布尔代数系的证明及其应用*

钟业勋 魏文展

(广西测绘局,南宁市建政路5号,530023)

摘 要 根据布尔代数的定义和充要条件,结合地图符号示例,论证了地图符号系统是布尔代数系;阐述了地图符号系统的多层结构原理;通过在地图符号系统中定义等价关系建立层次的方法,探讨了机助地图制图中通过多层次代数运算建构地图内容的理论价值和实践意义。

关键词 布尔代数;地图符号系统;多层结构;机助地图制图

分类号 P282

点是构成地图的细胞,点的概念和关系是构成地图的原始概念和原始关系[1]。笔者已证明了以点为基本元素的地图图像系统是布尔代数系[2],从而为通过点的位置和色彩变换来构造地图符号提供了数学工具。地图符号是地图的语言,它是构成地图符号系统的基本元素。本文根据布尔代数的定义和充要条件,证明地图符号系统也是布尔代数系。

1 布尔代数的定义、充要条件[3]及地图符号系统是布尔代数系的证明

1.1 偏序集

定义1 称$(L,\leqslant)$为子序集,若L上关系满足以下3个条件:

1)自反性:$a\leqslant a$;

2)反对称性:若$a\leqslant b$且$b\leqslant a$,则$a=b$;

3)传递性:若$a\leqslant b$且$b\leqslant c$,则$a\leqslant c$。

其中,a、b、$c\in L$,称$(L,\leqslant)$为偏序集。

1.2 地图符号系统中的偏序关系

1.2.1 地图符号论域及其幂集

设X为某幅地图,它是组成该图地图符号的集合,记

$$\mathscr{P}(X)=\{A;A\subset X\} \tag{1}$$

称$\mathscr{P}(X)$为X的幂集。约定Φ、$X\in\mathscr{P}(X)$,如果X中有n个元素,则$\mathscr{P}(X)$中有2^n个元素。

显然,个体地图符号、单一图元和复合图元[4]均满足式(1),都属于$\mathscr{P}(X)$的子集。

1.2.2 幂集上的偏序关系为包含关系[5,6]

若$\mathscr{P}(X)$是X的幂集,记$P=\mathscr{P}(X)$,则包含关系"$\subset$"是P上的偏序关系,即满足:

1)$A\subset A$;

2)若$A\subset B$且$B\subset A$,则$A=B$;

3)若$A\subset B$,$B\subset C$,则$A\subset C$。

1.2.3 地图符号系统中的包含关系

图1的地图符号系统存在下列包含关系:

$$\Phi\subset A\subset B\subset C\subset X \tag{2}$$

1.3 格

定义2 偏序集$(L,\leqslant)$称为格,如果对于任意a、$b\in L$,有$a\vee b$,$a\wedge b\in L$。在图1中,显然

$$A\vee\Phi=A,A\vee B=B,B\vee C=C,C\vee X=X$$
$$A\wedge\Phi=\Phi,A\wedge B=A,B\wedge C=B,C\wedge X=C$$
$$\Phi、A、B、C、X\in P=\mathscr{P}(X)$$

地图符号系统满足格的定义,它是格。

1.4 分配格

定义3 若$(L,\leqslant)$满足分配律,即$\forall a,b\in L$,有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$
$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

则称为分配格。

在图1中,a、b、$c\in P=\mathscr{P}(X)$,$(P,\subset)$满足分配律,即

$$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)=B$$
$$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)=A$$

可见,$(P,\subset)$是分配格。

1.5 布尔代数

定义4 设$(L,\leqslant)$是格,有最小元素0和最大元素1,$\forall a\in L$,若存在$a'\in L$,使$a\wedge a'=0$,$a\vee a'=1$,称L为有补格,a'称为a的补。有补的分配格称为布尔代数。

收稿日期:1999-06-10. 钟业勋,男,60岁,高级工程师,现从事地图学理论研究。

*广西自然科学基金资助项目,编号9711006。

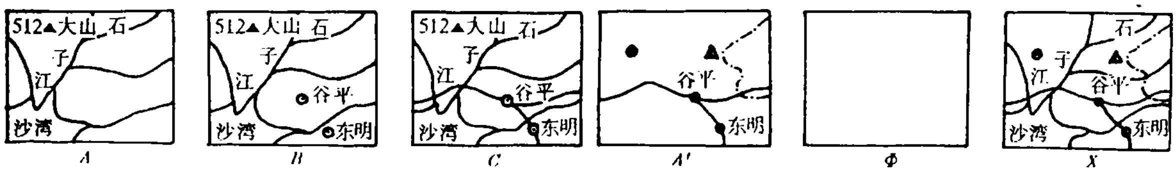

图1 地图符号系统示意图

Fig. 1 Diagram of Cartographic Symbol System

在图1中，$A\in P$，$A'=(1-A)\in P$，且 $A\wedge A'=\Phi$，$A\vee A'=X$，可见 A' 为 A 的补，Φ 和 X 分别为地图符号系统中的最小单位元素和最大单位元素，与定义4中的0与1等效。

1.6 布尔代数的充要条件

定理1 L 是布尔代数的充要条件为存在两种运算 $\vee$ 和 $\wedge$，且满足：

1) $a\wedge b=b\wedge a$，$a\vee b=b\vee a$ （交换律）

2) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ （分配律）

3) 存在1和0，使 $a\vee 0=a$，$a\wedge 1=a$ （存在单位元素）

4) $\forall a\in L$，存在 $a'\in L$，使 $a\wedge a'=0$，$a\vee a'=1$

1.7 地图符号系统$(P,\subset)$是布尔代数系的证明

证：使定理1中的各符号分别与图1中的符号一一对应，即：a-A，b-B，c-C，a'-A'，0-Φ，1-X，对于 $\vee$ 和 $\wedge$ 两种运算，有：

1) $A\wedge B=B\wedge A=A$，$A\vee B=B\vee A=B$

2) $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)=B$

$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)=A$

3) $A\vee\Phi=A$，$A\wedge X=A$，Φ 与 X 为地图符号系统中的单位元素 （存在单位元素）

4) $\forall A\in P$，$A'\in P$，$A\wedge A'=\Phi$，$A\vee A'=X$ （互补律）

由于地图符号系统$(P=\mathscr{P}(X),\subset)$满足布尔代数的充要条件，故为布尔代数系。

2 布尔代数在机助地图制图中的意义和应用

2.1 以点为基本元素的布尔代数系是地图符号机助设计的理论基础

地图是客观实体的形象-符号化的空间模型。地图符号是“模式化的图解语言”，它以视觉形象指代抽象概念，具有视觉特性和空间特性。地图符号主要包括视觉图像的3种类型，即图形符号、色彩符号、文字符号。地图符号的外在特征可以通过形状、尺寸、方向、明度、密度、结构、颜色、位置等视觉变量[7]的不同组合生成，归根结底可以通过一组点的位置和颜色的变换来实现。以点为基本元素的地图图像系统属布尔代数系，它是适于计算机作逻辑运算的符号系统，这就为机助地图符号设计提供了理论基础和数学工具。具有创造力的人与高速运算的计算机结合，能大大提高符号的设计数量和质量，从而为地图符号库的建设、丰富、更新创造有利条件。而地图符号库的丰富、充实和适时更新，无疑对整体提高地图的质量和表现力，拓宽服务领域等具有重要意义。

2.2 地图符号系统的布尔代数结构是多层次建构地图内容的理论基础和数学工具

2.2.1 地图符号系统中的层次原理及形成方法

定义5 设$\{X_i\}_{i\in I}$是已知集合 X 的子集的一个族，即$\forall i\in I$，$X_i\subset X$，如果满足条件：

1) $X=\bigcup_{i\in I}X_i$；

2) $\forall i\in I$，$X_i\neq\Phi$；

3) $\forall(i,i')\in I\times I'$，$i\neq i'\Rightarrow X_i\wedge X_{i'}=\Phi$。

则集合族$\{X_i\}_{i\in I}$就叫做集合 X 的一个分类，每个 X_i 叫做分类$\{X_i\}_{i\in I}$中的一个类。

定理2 集合 X 上的等价关系“~”决定 X 的一个分类$\{X_i\}_{i\in I}$，使得 X 的元素 x 与 x' 同属一类 $\Longleftrightarrow x\sim x'$。反之，集合 X 的每个分类$\{X_i\}_{i\in I}$决定 X 的一个等价关系“~”，其定义如下：

$x\sim x'\Longleftrightarrow x$ 与 x' 属于同一类 X_i[8]。

在制图实践中，对 $x\in X$ 通常定义3种等价关系“~”，从而获得3种分类：

1) 在符号的性质 i 上定义等价关系，则

$$X=\bigcup_{i\in I}X_i \tag{3}$$

按居民地、道路、水系、地貌等分类属此种分类。

2) 在符号的表象特征（颜色）j 上定义等价关系“~”，则

$$X=\bigcup_{j\in J}X_j \tag{4}$$

地图四色印刷中的黄、品红、青、黑色四类要素，即属此种分类。

3) 在符号浓淡层次和使用的网线比例 t 上定义等价关系“~”，则

$$X=\bigcup_{t\in T}X_t \tag{5}$$

按网线比例10%，15%，…，100%（实地）的分类

即属于此种分类。

以上3种分类便构成了地图符号系统的相应包含关系和层次:

$$\begin{cases} \Phi \subset x \subset X_i \subset X \\ \Phi \subset x \subset X_j \subset X \\ \Phi \subset x \subset X_t \subset X \end{cases} \tag{6}$$

2.2.2　*层次原理在地图制图中的应用*

在常规制图中,层次的形成和原理的应用通常是式(6)的复合应用,表现为分版、套晒底版或印刷版、多色叠印等形式。

层次原理在机助制图中有更大的应用价值。地图的建立不一定都是从最基本层的"字母"开始(即点、线、面、素或点),在哪个层次上条件具备时,就可以在哪个层次开始,而那个层次上的素或元素(要素)就作为基础"字母"[9]。机助制图的实践表明,充分利用地图符号系统的层次结构,进行多层次代数运算构建地图内容的理论正确,方法先进,有很大的开发潜力。

3　结　论

地图符号系统是布尔代数的证明以及系统层次结构原理的阐述,为机助地图编绘提供了理论基础和数学工具,同时也为机助制图中多层次构建地图内容的实践提供了理论支持。充分利用布尔代数的结构适于计算机作逻辑运算的特点,将为计算机地图编绘的软件研制、开发和应用展示广阔的前景。

参　考　文　献

1　钟业勋,胡毓钜.地图的集合模型(表达式)及比较应用初探.武汉测绘科技大学学报,1990,15(1):58～65

2　钟业勋.地图图像系统为布尔代数系的证明.武汉测绘科技大学学报,1999,24(1):53～55

3　张文修,王国俊.模糊数学引论.西安:西安交通大学出版社,1991.32～41

4　钟业勋,胡毓钜.地图模糊矩阵模型与制图术语表述数学化研究.武汉测绘科技大学学报,1993,18(4):1～12

5　聂灵沼,丁石孙.代数学引论.北京:高等教育出版社,1988.22

6　谷超豪.数学词典.上海:上海辞书出版社,1992.429

7　俞连笙,王　涛.地图整饰.北京:测绘出版社,1985.98～128

8　李孝传,陈玉清.一般拓扑学导引.北京:高等教育出版社,1982.23～24

9　胡毓钜,胡　鹏.地图语言层次概念与地图代数简述.地图,1994(3).3～9

The Proof of Cartographic Symbol System Belonging to Boolean Algebraic One and Its Application

Zhong Yexun　Wei Wenzhan

(Guangxi Regional Bureau of Surveying and Mapping, 5 Jianzheng Road, Nanning, China, 530023)

Abstract　This paper demonstrates that cartographic symbol system belongs to Boolean algebraic one according to Boolean algebraic definitions and sufficient conditions. The graded principle of cartographic symbol system and its constituted methods are expressed by defining the relation of equal value in cartographic symbol system. The theoretical value and practical meaning of structure map contents by multi-level algebraic operation in computer-aided cartographic are researched. Because Boolean algebra is a system sutiable for logic operation of computer, it provides wide prospects for the exploitation and application of the software of computer-aided cartography.

Key words　Boolean algebra; cartographic symbol system; stereogrammic organization; computer-aided cartography