

用极移数据直接测算钱德勒摆动 Q 值

王文均

(中国科学院测量与地球物理研究所,武汉市徐东路174号,430077)

摘要 运用已经发展起来的共振激发和参数共振模型,在频率调制的基础上,对 IERS 极移数据测算出钱德勒摆动的 Q 值,得到平均值为 63,并以每百年 0.8 的速率在增大。这一结果与 Q 的滞弹性 PREM 模型理论值 69 十分接近,表明共振激发模型和参数共振模型完全与钱德勒摆动滞弹理论相容。

关键词 钱德勒摆动; IERS 极移数据; 共振激发; 参数共振; 滞弹性

分类号 P222

国际地球自转服务中心(IERS)地球极移数据被 IERS Convention (1996)确认为技术规范。其中不仅有 1900 年以来极移坐标 X 和 Y 的值,还有用滤波方法得到的钱德勒摆动(CW)和周年极移的分离值,同时给出残差项。据称,这个技术规范的精度为 0.1mas ,即 $0.0001''$,略去了所有 $0.00005''$ 以下的项。这些序列数据是分析极移的基础。

对极移的研究,多年来一直集中在钱德勒摆动的周期和 Q 值上,同时注意摆动的激发和衰减问题。显然,如果激发和衰减分析得不合理,得到的周期特别是 Q 值就出现很大差异。Smith 和 Dahlen(1981)给出了 CW 周期和 Q 值的研究结果和方法^[1]。朱耀仲(1991)进一步运用 Zschau 改进的滞弹性 PREM 地球模型,得到了 CW 周期和理论 Q 值^[2]。高布锡(1993)运用 Fourier 反卷积方法,从国际纬度服务中心(ILS)极移数据分离得到 CW 和周年极移逐年值,进一步探讨了振幅关系,认为 CW 是不稳定的,具有振幅调制^[3]。

但是,一直认为很不容易从极移数据直接测算 CW 的 Q 值。在不同的阻尼假设下,解出的 Q 值从 25 到 600,甚至几千几万,不符合理论值。王文均(1998)提出共振激发模型,用周年极移振幅代表周年激发函数,反演激发函数频率^[4]。在运用高布锡(1993)归算的 CW 参数的基础上,得到激发函数频率在 1 的周围,从而证实 CW 确实是周年激发函数通过共振维持。正因为 CW 频率与周年激发频率相差近 20%,能量的传递大约在 10%左右。同时,为验证计算的正确性,通过共振激发模型中衰减指数 λ 的反演,也得到了 CW 的 Q 值。结果表明,对 ILS(1903~1975)极

移数据, Q 值应为 63,符合实际。这证实算法是可行的。王文均(1999a)对极移共振激发模型改用正演研究,也得到符合实际的主周期解,并对一系列极移现象进行了非线性分析^[5]。王文均(1999b)考虑了滞弹性地球形变可能引起的频率调制,对参数引入周期性时变,结果说明 CW 的长周期变化可能是参数共振引起的,提出了 CW 的参数共振模型。

本文改用 IERS 极移数据,这是共 98 年的资料,每年 20 个值,共计 1960 个值。计算 CW 参数,测算 Q 值时,不像逐年值那么好算,但逐年值又会丧失较多信息。文中采用共振激发模型计算,引入滞弹性引起频率调制的参数共振模型修正。

1 共振激发

IERS 极移数据中给出的 CW 坐标 X 、 Y 应满足非刚体自转方程:

$$\begin{cases} X'/\sigma + Y = \Psi_2 \\ Y'/\sigma - X = -\Psi_1 \end{cases} \quad (1)$$

如考虑到线性阻尼衰减,可将上述方程中 X 、 Y 分离成单独的二阶非齐次方程:

$$\begin{cases} X' + \lambda X + \sigma Y = \sigma \Psi_2 \\ Y' + \lambda Y - \sigma X = -\sigma \Psi_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} X'' + 2\lambda X' + \sigma^2 X = A_1 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \\ Y'' + 2\lambda Y' + \sigma^2 Y = A_2 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \end{cases} \quad (3)$$

计算时通常采用 CW 振幅 U , $U = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ 。 U 不像 X 、 Y 满足简谐运动方程,而应满足椭圆函数方程。但是,振幅 U 满足的椭圆椭圆率不足 0.01。若认为这个椭圆率符合实际,应推出

X、Y 相差 $X=0.999\ 95\ Y$ 或 $Y=0.999\ 95\ X$ 。在 IERS 极移数据得到的 CW 振幅极大值小于 250mas 情况下, U 用简谐圆周运动逼近的误差小于 0.012 5mas。这与数据观测精度相差很大, 因此完全可以用简谐运动方程来近似处理 CW 振幅 U 。这时,

$$U'' + 2\lambda U' + \sigma^2 U = A_r \sigma \cos(\Omega t + \beta) \quad (4)$$

式中, Ω 为强迫频率, 设定为周年激发函数频率, σ 为 CW 频率; A_r 是周年激发函数, 这里为未知。解方程(4)可得:

$$U = A_c e^{-\lambda t} \cos(\omega_c t + \Phi) + a \cos(\omega t + \delta) \quad (5)$$

式中, A_c 是 CW 振幅; ω_c 是 CW 频率; Φ 是 CW 初相位。前项是自由摆动, 由于 $\lambda > 0$ 而不断衰减; 后项是强迫作用的结果, 对 CW 补充能量, 产生新的 CW 振幅 a 、频率和相位, 这里为相位延滞。 a 和 δ 可解为:

$$\begin{cases} a = (A_r \sigma) / [(\Omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2]^{\frac{1}{2}} \\ \tan \delta = (2\lambda \Omega) / (\Omega^2 - \sigma^2) \end{cases} \quad (6)$$

为计算方便, 常取 $\delta' = 180^\circ + \delta$ 。因 $\tan(180^\circ + \delta) = \tan \delta$, 故不影响计算结果。

当 $\Omega \approx 1, \sigma \approx 0.84$ 时, Ω 与 σ 相差近 20%, 但仍能产生共振, 称为非线性共振, 容易由式(6)中第二式算得。当 $\lambda = 0.04$ 时, 相位延滞为 $\delta' = 60^\circ$, 即有延滞角 $\delta = -120^\circ$, 这就是 CW 与周年激发函数比较的相位。

2 参数共振

由于地球滞弹性形变, 自转时频率将受到月球带谐潮的摄动。于是, 地球上大气、海洋、地表水等的变化频率也受到 18.6 年周期频率的调制, 这些量的变化构成周期激发函数, 因而周期激发函数也应有 18.6 年周期的频率调制。根据上段的共振激发模型, 周年激发函数的 18.6 年周期频率调制也传递给 CW 频率, 使得 CW 频率具有一个 18.6 年周期的频率调制。而且, 因为阻尼是与频率有关的, 阻尼衰减指数也将与频率一样, 受到 18.6 年周期的频率调制。这样, 式(4)中的参数 λ 和 σ 都由于频率调制而出现摄动, 使其成为参变非线性方程, 其中

$$\begin{cases} \lambda(t) = \lambda + \lambda_0 \cos(\omega_0 t) \\ \sigma(t) = \sigma_c + \Delta \cdot \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad (7)$$

式中, σ_c 为 CW 固有频率或平均频率; Δ 为频率摄动量, 由于滞弹性使 Love 数的摄动约 3%, Δ 也应为 σ_c 的 3%; $\omega_0 = \sigma_c \pm (1/18.6)$, 计算时可用

$\omega_0 = \sigma_c - (1/18.6) = 0.788\ 761$, 这是 CW 的极端最小频率, 在实际 ILS 和 IERS 极移数据中确实出现过。式(7)中的频率调制也可处理为余弦乘在原频率上, 此时只需将 $\cos(\omega_0 t)$ 展为级数, 取两项并线性化, 仍然可以得到式(7)。对于频率来说, 叠加也是一种调制。

在式(7)的条件下解方程(4), 得到参数共振解^[6]为:

$$a = a_0 \exp\{F(\theta, \theta_0)\} \quad (8)$$

式中,

$$2\theta_0 = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{1}{\omega_0 + 2} - \frac{1}{\omega_0 - 2} \sin(\omega_0 \pi)}{\frac{1}{\omega_0 + 2} + \frac{1}{\omega_0 - 2}} \right] \quad (9)$$

因 $\theta_0 \in (-\pi/2, -\pi)$, 则 $2\theta_0 \in (-\pi, -3\pi/2)$ 。

$$a_0 = \frac{(2/\pi) A_r \cos \theta_0}{4 | \sigma_c - \omega_0 | - d_2^{(1)} \sin(2\theta_0) - d_2^{(2)} \cos(2\theta_0)} \quad (10)$$

式中,

$$d_2^{(1)} = \left[\frac{1}{\omega_0 + 2} + \frac{1}{\omega_0 - 2} \right] \left[\frac{2\lambda_0}{\pi} \sin(\omega_0 \pi) + \frac{\omega_0}{2\pi} (1 - \cos(2\omega_0 \pi)) \right] + O(10^{-6});$$

$$d_2^{(2)} = \left[\frac{1}{\omega_0 + 2} + \frac{1}{\omega_0 - 2} \right] \left[\frac{2\lambda_0}{\pi} (1 - \cos(2\omega_0 \pi)) + \frac{\omega_0}{2\pi} \sin(\omega_0 \pi) \right] + O(10^{-6})。$$

本文主要用 θ_0 来修正式(6)中的 δ , 因为在式(6)中 δ 是未考虑滞弹性而得出的。但是, 又不能直接用式(7)~(10)求解 CW 参数, 因式(7)中 λ, λ_0 和 Δ 都是未知的, 仅 ω_0 已推算出, 用来计算滞弹性下真正实现的 CW 相位延滞。

3 计算步骤

CW 和周年极移已经从 IERS 极移数据中分离, 记作 X_c, Y_c 和 X_a, Y_a 。本文只用这 4 列数据计算 CW 参数, 步骤如下:

1) 计算 CW 振幅 $A_c = (X_c^2 + Y_c^2)^{1/2}$ 。

2) 计算 CW 相位 $\varphi_c = \tan^{-1}(Y_c/X_c)$ 。

3) 计算 CW 相位的瞬时变化, 即平均频率下的相位差与实际相位差的差值。注意到 CW 平均周期为 433.26d, 相应频率或固有频率取作 $f_\omega = 0.843\ 01$ 。则 IERS 的 CW 每两数据间平均应扫过相位 $\Delta\varphi_c = (0.843\ 01 \times 2\pi/20) \times 180^\circ/\pi$, 而实际相位移过 $\varphi_{ci+1} - \varphi_{ci}$, 其中相位差大于 180° 时应减去。于是, 相位的真实瞬时变化为 $\Delta\varphi_i =$

$$\varphi_{ci} - \varphi_{ci-1} - \Delta\varphi_c$$

4) 计算瞬时频率,即两数据之间 CW 的平均频率, $f_{ci} = f_{\omega} + \Delta\varphi_i/360^\circ$ 。

5) 计算相位延滞 $\delta' = (f_{ci}^{-1} - 1) \times 360^\circ$ 。

6) 计算周年瞬时频率 $f_i = [\tan^{-1}(Y_{ai+1}/X_{ai+1}) - \tan^{-1}(Y_{ai}/X_{ai})]/360^\circ$ 。

7) 计算线性阻尼衰减指数,用式(6)第二式计算。

8) 用式(8)计算相位延滞修正值 θ'_0 。

9) 计算 CW 频率改变值 $f_{CK}^{-1} = 1 + \theta'/360^\circ$ 。

10) 计算 CW 质量因数 $Q = \pi f_{CK}/\lambda_k$ 。式中, λ_k 为修正阻尼衰减指数平均值, λ_k 等于式(7)中计算 λ 的平均值按式(6)第二式修正为 θ'_0 的结果, $\lambda_k = \lambda \times \tan\theta_0/\tan\delta$, δ 为式(6)中相位延滞平均值。

由第(4)步计算得到的瞬时频率不够平稳,这应属于系统误差。有时在 1/20 年里出现很大变化。为保持瞬时频率相对平稳,又不丧失每年 20 个值的信息,笔者采用 5 阶和 10 阶,即 1/4 年和 1/2 年平滑,结果瞬时频率相对平稳。

4 计算结果

对以上计算,图 1 为 CW 振幅;图 2 为瞬时频率;图 3 为线性衰减指数;图 4 为质量因数变化值,且 $y=0.0004x+63.1; R^2=0.0007$ 。由此可得:①经平滑后,CW 频率的平均值为 0.84252426,对应于 433.51d 周期,与公布的 433.26d 周期相差不大。②CW 振幅均值为 0.13254888", 明显具有强烈的振幅调制。③CW 相位延滞均值 67.29° 或 -112.71°。④周年极移频率变化不大,平均值为 0.99951584。⑤CW 线性阻尼衰减指数平均值为 0.055544。⑥考虑滞弹性后,相位延滞修正为 61.3147°, 比原来的 67.29° 减小近 6°, 相应的频率偏差使得频率最大变为 0.8544675, 使得 λ 的修正值为 0.0424797, 于是得到衰减周期 23.5 年, Q 值为 63。

从计算结果可知,CW 频率明显具有调制性,如能归算出每年平均频率,对逐年值进行分析,应可得到频率的调制周期。本文考虑的阻尼由线性阻尼的共振激发模型进一步修正为非线性参数共振的滞弹性模型,测算出来的 CW 质量因数 Q 值接近理论值。这些差异表明,参数共振模型与滞弹性模型吻合,也表明非平衡极潮等尚未包含在参数共振模型之内。由 Q 值的依时变化得

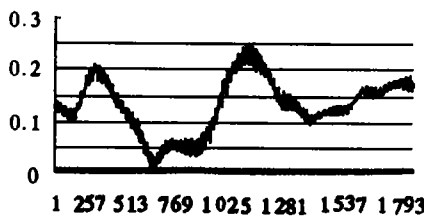


图 1 CW 振幅的长期变化

Fig.1 Long Period Variation of CW

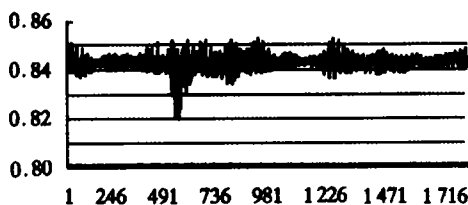


图 2 CW 频率调制趋势

Fig.2 Frequency Modulation Trend of CW

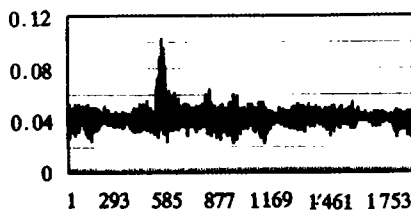


图 3 CW 阻尼衰减指数

Fig.3 Damping Attenuation Index of CW

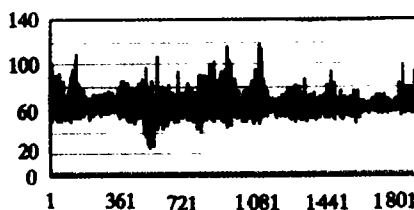


图 4 CW 质量因数 Q 值变化

Fig.4 Quality Factor Q of CW

到线性趋势 $Q(t) = 0.0008t + 63.23$, 按逐年算, 增大率为每年 0.034, 或每百年增大 0.8。根据 1/Q 的物理意义, 这个 Q 值的上升趋势应代表 1/Q 的下降或 CW 能量的长期衰减趋势。

参 考 文 献

- 1 Smith D. Variations in the Orientation of the Geophys. J. R. astr. Soc., 1981, 64:223
- 2 朱耀仲. 钱德勒摆动和 Q 的理论值. 中国科学(B辑), 1991, 12:1 335
- 3 高布锡. 钱德勒摆动周期是稳定的吗. 中国科学(B辑), 1993, 23(5):553
- 4 王文均. 地极移动的非线性动力机制. 天文学报, 1998, 39(3):287
- 5 王文均. 钱德勒摆动的非线性分叉耗散. 天文学报, 1999a, 40(3):94
- 6 王文均. 地球极移的非线性动力学机制——钱德勒摆动非线性阻力衰减. 非线性动力学学报, 1999, 6(1):60

Specification of Q for Chandler Wobble Directly from Polar Motion Data

Wang Wenjun

(Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 174 Xudong Road, Wuhan, China, 430077)

Abstract Former dynamical equations of Chandler wobble did not introduce damping attenuation index. Therefore, it says that Q of Chandler wobble can not be easily specified directly from polar motion data. A resonance excitation model is introduced, which provides the reason that CW amplitude reserves an adequate level. And later, the resonance excitation model is developed into a parameter resonance one. The parameter resonance model shows that CW amplitude oscillates high in long period. In this paper, Q of Chandler wobble is easily specified from IERS polar motion data using the developed resonance excitation model. But since in resonance excitation model the damping index is linear, Q of Chandler wobble specified from the data shows a little small. Then frequency modulation is introduced. The frequency and damping parameter in the resonance excitation equation become as time-dependent parameters. Parameter resonance model can provide a revision of visco-elasticity for computing Q . Then the mean value of Q is 63, which is increasing slowly at the rate of 0.8 every secular period. This result is very much identical with the theoretical Q result of 69 under visco-elastic PREM model. It shows that parameter resonance model is exactly appropriate with the visco-elastic theoretical model. The long time tendency of Chandler wobble is figured out. Frequency modulation can be seen and analyzed spectrally. Time series of attenuation index is provided and time series of Q shows a very stable result in the figure.

Key words Chandler wobble; IERS polar motion data; resonance excitation; parameter resonance; visco-elasticity

本刊自 2000 年元月起将改为双月刊, 出版时间为双月 5 日。更改刊期后页码、定价及办刊宗旨、服务对象均不变。特此告知关心本刊发展的新老朋友。