

迭代扩展卡尔曼滤波用于实时 GPS数据处理*

郭 杭

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 129号,430079)

摘 要 标准的卡尔曼滤波可以扩展到非线性模型,即将泰勒公式应用于状态方程和观测方程,得到扩展卡尔曼滤波公式.首先推导了计算公式,研究了迭代计算方法,并将其用于GPS数据的实时处理.

关键词 卡尔曼滤波;泰勒公式;GPS数据

分类号 p228.41; p207

卡尔曼滤波是数据处理中消除噪声的一种方法.一般认为,一个动态系统可通过一组变量来描述.状态变量是观测值的函数,观测值本身带有随机噪声.动态GPS测量中,用卡尔曼滤波从受扰动的数据中去估计状态变量,能快速和准确地算得三维坐标.按照发展阶段,卡尔曼滤波方法描述如下:

1) 卡尔曼滤波是线性、最小方差和递推的方法,以估计离散时间序列中线性动态系统各个时刻的状态变量.

2) 标准卡尔曼滤波能被扩展到非线性系统.将泰勒近似公式应用于状态方程和观测方程,得到线性化的方程,再用卡尔曼滤波来估计其状态变量.该方法已有效地应用于非线性模型.但当初始值很差或扰动太大时,线性化不能表达这样的系统,甚至不能得到状态变量满意的收敛.

3) 迭代扩展的卡尔曼滤波方法能解决2)中的问题.将观测方程在各个时刻线性化后,进行迭代计算.对明显的非线性观测方程,该方法比扩展卡尔曼滤波更有效.

4) 平滑是处理非线性系统的另一种方法.与前面的方法比较,它能得到更好的结果.

1 迭代扩展的卡尔曼滤波

在离散时间域,随机模型的状态方程和观测方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \Delta(k+1) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(k+1)$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{A}(k+1, k)$ 为 $n \times n$ 转置矩阵; $\mathbf{B}(k)$ 为 $n \times m$ 扰动矩阵; $\mathbf{w}(k)$ 为 m 维系统噪声向量; $\mathbf{z}(k+1)$ 为 p 维观测向量; $\mathbf{C}(k+1)$ 为 $p \times n$ 观测矩阵; $\Delta(k+1)$ 为 p 维观测噪声向量; $\mathbf{w}(k)$, $\Delta(k+1)$ 是具有零期望值的白噪声.

对于一个非线性模型,有下面的公式(仅限于讨论观测方程):

$$\mathbf{z}(k+1) = g\{\mathbf{x}(k+1)\} + \Delta(k+1) \quad (2)$$

其中, g 是状态向量 \mathbf{x} 的函数.

观测方程在 $\mathbf{x}^{(0)}(k+1)$ 处线性化,得到:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + g\{\mathbf{x}^{(0)}(k+1)\} - \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}^{(0)}(k+1) + \Delta(k+1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \mathbf{C}(k+1) &= \frac{\nabla g\{\mathbf{x}^{(0)}(k+1)\}}{\nabla \mathbf{x}(k+1)} \\ \mathbf{x}^{(0)}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1/k) \end{aligned}$$

假定一个伪观测向量为:

$$\mathbf{l}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - g\{\mathbf{x}^{(0)}(k+1)\} + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}^{(0)}(k+1) \quad (4)$$

$\mathbf{l}(k+1)$ 的方差矩阵是 $\mathbf{R}(k+1)$, 新的观测方程与式(1)相类似:

$$\mathbf{l}(k+1) = \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \Delta(k+1) \quad (5)$$

因此,其相应的卡尔曼滤波递推公式为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \hat{\mathbf{x}}(k+1/k) + \\ &\mathbf{K}(k+1)\mathbf{d}(k+1/k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{xx}(k+1) &= \mathbf{D}_{xx}(k+1/k) + \\ &\mathbf{K}(k+1)\mathbf{D}_{dd}(k+1/k)\mathbf{K}^T(k+1) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) = \mathbf{A}(k+1, k)\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (8)$$

$$\mathbf{D}_{xx}(k+1/k) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{D}_{xx}(k)$$

收稿日期: 1998-10-23. 郭杭, 男, 38岁, 博士生, 副教授, 现从事测量数据处理和分析研究.

* 国家自然科学基金资助项目, 编号 49774212

$$A^T(k+1, k) + B(k)Q(k)B^T(k) \quad (9)$$

$$K(k+1) = D_{xx}(k+1/k)C^T(k+1) \cdot$$

$$D_{dd}^{-1}(k+1/k) \quad (10)$$

$$d(k+1/k) = I(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k+1/k) \quad (11)$$

$$D_{dd}(k+1/k) = C(k+1)D_{xx}(k+1/k) \cdot$$

$$C^T(k+1) + R(k+1) \quad (12)$$

其中, $\hat{x}(k+1)$ 为第 $k+1$ 时刻的最优估计值向量; $\hat{x}(k+1/k)$ 为一步预报值向量; $K(k+1)$ 为增益矩阵; $d(k+1/k)$ 为预报残差向量; $D_{xx}(k+1)$ 为最优滤波值向量之协方差矩阵; $D_{xx}(k+1/k)$ 为一步预报值的协方差矩阵; $D_{dd}(k+1/k)$ 为预报残差向量协方差阵; $Q(k)$, $R(k+1)$ 是过程噪声和测量噪声协方差矩阵。

根据上述新观测方程进行迭代计算。在任意时刻 $k+1$ 迭代计算估计值的步骤如下:

1) $x(k+1)$ 的一步预报状态向量 $\hat{x}(k+1/k)$ 作为迭代的初始值 $x^{(0)}(k+1)$, 将观测方程线性化, 计算滤波值与扩展卡尔曼滤波相同, 并把结果 $\hat{x}(k+1)$ 作为 $x^{(1)}(k+1)$ 。

2) 在 $x^{(1)}(k+1)$ 处重新将观测方程线性化。整个滤波过程重复一遍, 新估计值 $\hat{x}(k+1)$ 作为 $x^{(2)}(k+1)$ 。

3) 运算中, 如果状态向量的分量不符合公式 $|\hat{x}_j^{(i+1)}(k+1) - \hat{x}_j^{(i)}(k+1)| \leq X$ $j = 1, 2, \dots, n$ (13)

回到 2); 否则, 迭代终止。其中 X 是预先给定的迭代门限。

一般来说, 系统模型线性化导致的误差很小。如果任一时刻的估计值 $\hat{x}(k+1/k)$ 与真值相差很大, 一阶近似就不能反映真实情况, 由滤波计算得到的最后估值与真值明显不同。上述迭代方法能够改正这种线性化误差。

所有的公式均被写成程序, 使其能够进行递推和实时计算。下面用实例进一步加以说明。

2 实例

在下面的例子中, 用迭代卡尔曼滤波来处理 GPS 数据。

2.1 状态方程

假定一车辆在时刻 $k+1$ 时的三维运动可以用离散动态模型来描述:

$$x(k+1) = A(k+1, k)x(k) + B(k)w(k) \quad (14)$$

其中, $x(k+1) = (x(k+1), y(k+1), z(k+1), v_x(k+1), v_y(k+1), v_z(k+1))^T$

$$A(k+1, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} 0.5\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5\Delta t^2 \\ \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$

$$w(k) = (a_x(k), a_y(k), a_z(k))^T$$

其中, $x(k+1)$, $y(k+1)$ 和 $z(k+1)$ 是车辆的位置, v_x , v_y 和 v_z 是其速度, 而 a_x , a_y , a_z 是加速度。从 k 到 $k+1$ 的时间间隔为 Δt

2.2 观测方程

GPS 数据这里涉及伪距和相位速率, 分别用双差伪距和双差相位速率组成观测方程

对双差伪距有:

$$L(k) = r_1^s - r_1^{rs} - (r_0^s - r_0^{rs}) + \Delta(k) \quad (15)$$

其中, r_1^s 是第 k 周期地面点到卫星的几何距离; r_1^{rs} 是地面点到参考卫星的距离; r_0^s 为地面参考点到卫星的距离; r_0^{rs} 为地面参考点到参考卫星的距离; $\Delta(k)$ 是模型误差

在近似值 $(x^{(0)}(k+1), y^{(0)}(k+1), z^{(0)}(k+1))$ 处, 线性化上面的模型, 即得到观测方程:

$$L_1(k+1) = r_1^s - r_1^{rs} - (r_0^s - r_0^{rs}) + a_x^s \Delta x(k+1) + a_y^s \Delta y(k+1) + a_z^s \Delta z(k+1) + \Delta_1(k+1) \quad (16)$$

假设 (x^s, y^s, z^s) , (x^{rs}, y^{rs}, z^{rs}) 分别为卫星和参考卫星的坐标, 且

$$l_1(k+1) = L_1(k+1) - (r_1^s - r_1^{rs} - (r_0^s - r_0^{rs})) + a_x^s x^{(0)}(k+1) + a_y^s y^{(0)}(k+1) + a_z^s z^{(0)}(k+1)$$

则有:

$$l_1(k+1) = C_1(k+1)x_1(k+1) + \Delta_1(k+1) \quad (17)$$

其中, $C_1(k+1) = (a_x^s, a_y^s, a_z^s)$; $x_1(k+1) = (x(k+1), y(k+1), z(k+1))^T$; $a_x^s = (x^{(0)} - x^s) / r_1^s - (x^{(0)} - x^{rs}) / r_1^{rs}$; $a_y^s = (y^{(0)} - y^s) / r_1^s - (y^{(0)} - y^{rs}) / r_1^{rs}$; $a_z^s = (z^{(0)} - z^s) / r_1^s - (z^{(0)} - z^{rs}) / r_1^{rs}$

对双差相位速率, 有^[1]:

$$L_2(k+1) = [(x - x^s)(v_x - v_x^s) + (y - y^s)(v_y - v_y^s) + (z - z^s)(v_z - v_z^s)] /$$

$$\sqrt{(x - x^s)^2 + (y - y^s)^2 + (z - z^s)^2} \quad (18)$$

其中, (x, y, z) 和 (v_x, v_y, v_z) 是地面点的位置和速度向量,是未知量 将上面的方程在近似值 $(x^{(0)}(k+1), y^{(0)}(k+1), z^{(0)}(k+1), v_x^{(0)}(k+1), v_y^{(0)}(k+1), v_z^{(0)}(k+1))^T$ 处线性化,即可得到式(18)的线性化形式:

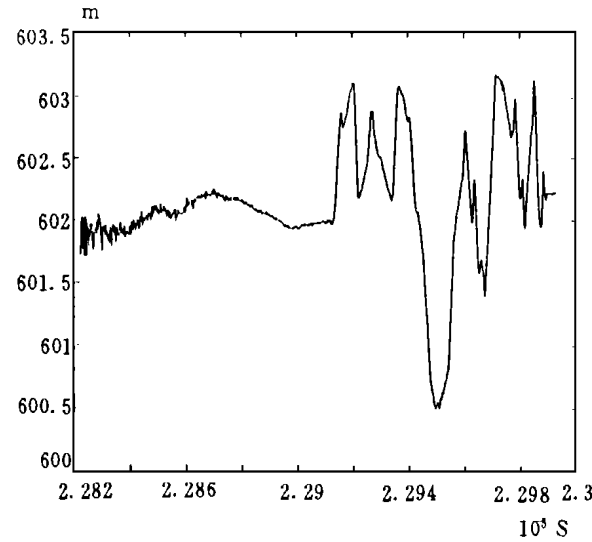
$$L_2(k+1) = L_2^{(0)}(k+1) + H\Delta x(k+1) + \Delta_2(k+1) \quad (19)$$

其中, $H = (\frac{\partial L_2(k+1)}{\partial x}, \frac{\partial L_2(k+1)}{\partial y}, \frac{\partial L_2(k+1)}{\partial z}, \frac{\partial L_2(k+1)}{\partial v_x}, \frac{\partial L_2(k+1)}{\partial v_y}, \frac{\partial L_2(k+1)}{\partial v_z})$ 是式(18)求导后的近似值. 与双差伪距相似,假设

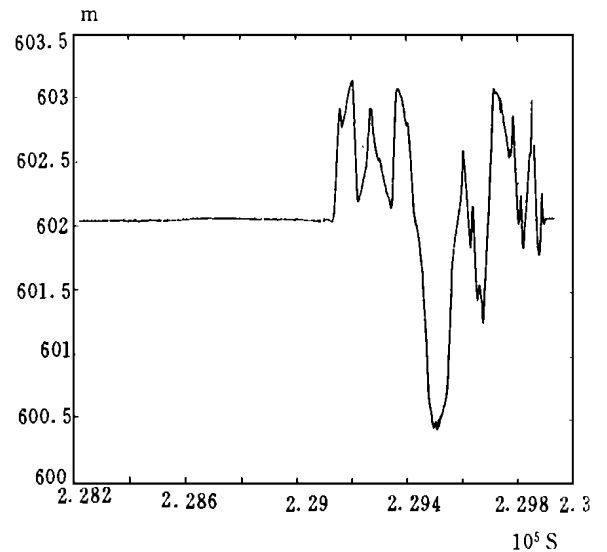
$$l_2(k+1) = L_2(k+1) - L_2^{(0)}(k+1) + Hx^{(0)}(k+1), \quad (20)$$

则有:

$$l_2(k+1) = Hx(k+1) + \Delta_2(k+1) \quad (21)$$



(a)



(b)

图 1 迭代扩展卡尔曼滤波计算结果和标准的数据计算结果

Fig. 1 IEKF Result of Mgps023 Data and Standard Result of Mgps023 Data

致谢:德国慕尼黑国防大学大地测量研究所给予很大帮助,在此表示感谢

参 考 文 献

- 1 Eissfeller B. Analyse Einer Geodatischen Raumstabilisierten Inertialplattform und Integration mit GPS. Heft 37, Schriftenreihe, Studiengang Vermessungswesen, UniBw-M, Neubiberg, 1989
- 2 Chui C K, Chen G. Kalman Filtering with Real-time

2.3 迭代扩展卡尔曼滤波方程的构造

将双差相位速率方程与双差伪距方程合并,组成一个观测方程:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} x(k+1) + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中, $H = [H_1, H_2]$,而状态方程仍为式(14),其相应的滤波方程为式(6)~(12)

2.4 实验

从1993年至1997年,笔者在德国慕尼黑国防大学实施了几个实验测量.参考点为F8,它的坐标属于WGS-84.在实验中,先进行大约15 min的静态测量,然后在不同的速度下进行动态测量.

在计算中,设置1 mm的门限,经几步迭代计算就达到很好的收敛.用该方法处理GPS023这组数据,结果如图1(a).它与图1(b)所示的标准答案相差仅几cm,这充分说明了该方法消除噪声的有效性.

Applications. Berlin: Springer, 1987 (17)

- 3 Wang J. Filtermethoden Zur Fehler-toleranten Kinematischen Positionsbestimmung. Heft 52, Schriftenreihe, Studiengang Vermessungswesen UniBw Munchen, Neubiberg, 1997
- 4 Zhang Z. Parameter Estimation Techniques A Tutorial with Application to Conic Fitting. Image and Vision Computing Journal, 1997, 15(1): 59-76

(下转第123页)

A Method to Set up Control Net with Extra-high Accuracy for Industrial Objects

Feng Wenhao

(School of Information Engineering, WUTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract It is necessary to set up a control net with extra-accuracy around the industrial objects. In this paper the theory and practice for setting up this kind of control net are presented while the length accuracy of precise standard rule and angle accuracy of precise theodolite are simultaneously used. The method could be used for accuracy test for a group of GPS receivers.

Key words control net; standard rule; theodolite; extra-high accuracy

(上接第 114 页)

Iterated Extended Kalman Filter Application to Real-time GPS Data Processing

Guo Hang

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WUTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract The Kalman filtering is a method with which the raw data with noise can be cleaned. The standard KF can be extended to a non-linear model. In the extended Kalman filter (EKF), Taylor proximate formula has been applied to both state equations and measurement equations, in order to estimate linearized dynamical models. But if the initial value is incorrect or the noise is very strong, the linearized models may not be good anymore. The iterated extended Kalman filter (IEKF) therefore has been applied to GPS raw data processing, and the results are satisfactory.

Key words Kalman filtering; Taylor formula; GPS data