

# 基于标准化残差的相关观测抗差估计模型

余学祥 吕伟才

(淮南工业学院资源与环境工程系,安徽省淮南市,232001)

**摘要** 根据观测误差与解差函数的关系,建立了由标准化残差构造的相关观测抗差估计模型。

**关键词** 相关观测;抗差估计;标准化残差;观测空间;设计空间

**分类号** P207

最小二乘(LS)估计所处理的观测值,既有相互独立的,也有彼此相关的,但不论哪一种观测值中含有粗差,均会使 LS 估计的成果遭到破坏。为增强平差成果对粗差的抵抗能力,自 1953 年 Box 提出抗差估计这个术语以来,国内外学者提出了许多基于  $M$  估计的抗差估计模型。对于独立观测值,抗差估计模型很多<sup>[1]</sup>。虽然相关观测抗差估计模型也不少,但其抗差效果不理想,如文献[1]中的正弦权函数法、Huber 权函数法、Tukey 权函数法、IGG 方案及有界影响抗差估计等。对于前 4 种模型,仅考虑到了观测空间对参数估值的影响;对于后一种模型,虽然同时考虑了观测空间和设计空间对平差成果的影响,但在实用过程中其抗差效果不佳(文献[1]中给出的算例是独立观测值)。构造一个对观测空间和设计空间均具有良好抗差效果的相关观测抗差估计模型,是测量数据处理迫切需要。

抗差估计模型的抗差效果取决于等价权函数。等价权函数不同,抗差估计模型就不同,当然其抗差效果也不一样。本文根据观测误差对参数估值的影响,通过对解差函数的分析,提出一种以标准化残差构造的相关观测等价权函数。通过对含模拟粗差的 GPS 网的计算分析,该模型对观测空间和设计空间均具有良好的抗差性,并可消除由于先验单位权中误差的取值不当而对抗差估计效果的影响。

## 1 观测误差对参数 LS 估计的影响

设有线性模型:

$$L = AX + \epsilon \quad (1)$$

$\epsilon$  为相关观测随机误差向量,其期望为 0,先验权

矩阵为  $P$ 。误差方程为:

$$V = A\delta\hat{x} - l \quad (2)$$

根据 LS 估计原理可得:

$$\delta\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (3a)$$

$$\hat{X} = X_0 + \delta\hat{x} \quad (3b)$$

$$V = -(Q_{rr} P) \epsilon = -(E - AN^{-1} A^T P) \epsilon \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{V^T P V / (n - m)} \quad (5)$$

式(4)中,  $Q_{rr} P$  为平差的几何条件<sup>[2]</sup>,主要取决于平差图形结构  $A$  和观测精度  $P$ 。定义其第  $j$  个对角元素为第  $j$  个观测值的多余观测分量  $r_{jj}$ ,即

$$r_{jj} = (Q_{rr} P)_{jj}, \text{ 且 } \sum_{j=1}^n r_{jj} = n - m \quad (6)$$

则平差后第  $j$  个观测值的残差为:

$$v_j = -r_{jj} \epsilon_j - \sum_{i=1}^n r_{ji} \epsilon_i \quad (7)$$

从式(7)可以看出,对于  $r_{jj}$  较小的观测值,其误差在残差中得不到充分反映。这种观测值称为杠杆观测值。引言中提到的前 4 种抗差估计模型,由于均以残差来构造等价权函数,因此由式(7)可以看出,它们对非杠杆观测值中的粗差有一定的抗差效果,但对杠杆观测值中的粗差却缺乏抵抗能力<sup>[3]</sup>。因此,能否对杠杆观测值中的粗差具有抗差能力,是衡量抗差估计模型抗差效果优劣的一个主要指标。

以上讨论的是观测误差  $\epsilon$  如何通过设计空间  $r$  来影响观测值的残差即观测空间  $V$ ,从而影响到观测值的平差值。观测空间  $V$  对参数估值的影响可通过解差函数来衡量。Cook 于 1982 年构造了如下的解差函数<sup>[1]</sup>:

$$D_j(N, C) = \Delta X_{(j)}^T N \Delta X_{(j)} / C \quad (8)$$

式中,  $N$  是给定的正定方阵,一般取为法矩阵,  $N = A^T P A$ ;  $C$  为给定的常数,本文取为  $\hat{\sigma}_0^2$ ;  $\Delta X_{(j)}$  为解差,即从观测值  $L$  中去掉第  $j$  个观测值后所得

的参数估值  $\hat{X}_{(j)}$  与  $\hat{X}$  之差<sup>[1]</sup>;

$$\Delta X_{(j)} = \hat{X}_{(j)} - \hat{X} = N^{-1} a_j^T P_{jj} v_j / r_{jj} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),并顾及  $a_j N^{-1} a_j^T P_{jj} = 1 - r_{jj}$ , 可得:

$$D_j(N, C) = [(1 - r_{jj}) / r_{jj}] (\sqrt{p_{jj}} v_j / \sqrt{r_{jj}} \hat{\sigma}_0)^2 \quad (10)$$

式(10)反映了观测空间和设计空间对参数估值的联合影响。在式(10)中,若暂不考虑观测空间的影响,而仅考虑  $r_{jj}$  的变化引起的  $D_j(N, C)$  的变化趋势,则可写成:

$$D_j(N, C) = k_j (\sqrt{p_{jj}} |v_j| / \sqrt{r_{jj}} \hat{\sigma}_0) \quad (11)$$

式中,  $k_j$  为常数。根据  $D_j(N, C)$  的定义,对式(11)中  $\sqrt{p_{jj}} |v_j| / \sqrt{r_{jj}} \hat{\sigma}_0$  进行限制,即可限制观测空间  $V$  及设计空间对参数估值的影响,这正是本文的出发点。

## 2 相关观测抗差估计模型

记  $D_j = \sqrt{p_{jj}} |v_j| / \sqrt{r_{jj}} \hat{\sigma}_0 \quad (12)$

构造如下的相关观测等价权函数:

$$p_{jj} = \begin{cases} p_{j0}, & D_j \leq k_0 \\ p_{j0} \frac{k_0}{D_j} \left( \frac{k_1 - D_j}{k_1 - k_0} \right)^2, & k_0 < D_j \leq k_1 \\ 0, & D_j > k_1 \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $k_0$  为分位参数;  $k_1$  称为淘汰点。下面讨论  $k_0, k_1$  的取值。由式(12)得:

$$|v_j / \hat{\sigma}_0| = D_j \sqrt{r_{jj}} / \sqrt{p_{jj}} \quad (14)$$

在观测精度相近的情况下,暂不考虑  $\sqrt{p_{jj}}$  的影响,则式(14)可写成:

$$|v_j / \hat{\sigma}_0| = D_j \sqrt{r_{jj}} = k \quad (15)$$

为使观测值中的粗差能得到较好的监控,要求控制网的平均多余观测分量  $r = r/n$  在 0.4 以上<sup>[2]</sup>。顾及到  $r_j$  可能较小的情况,取  $r = 0.3$ <sup>[1]</sup>。当式(15)中的  $k$  在 1.5~2.0 范围内时,认为观测值中可能存在粗差,对这部分观测值采取降权处理;当  $k$  在 2.0~2.5 范围内时,则认为观测值中含有粗差,对这部分观测值淘汰。将  $r_{jj} = r = 0.3$  及上述  $k$  值范围代入式(15),计算得  $D_j = 2.74 \sim 3.65, 3.65 \sim 4.56$ 。从严格要求取  $k_0, k_1$  为:  $k_0 = 2.5 \sim 3.5, k_1 = 3.5 \sim 4.5$ 。

对于式(13)定义的等价权函数,有如下特点:

1)  $D_j$  实际上是标准化残差<sup>[1,2,5]</sup>,它本身对观测值中的粗差具有较强的抗差能力<sup>[5]</sup>。因此以

$D_j$  来构造等价权函数有一定的理论基础。

2) 由于  $D_j$  受观测空间和设计空间的共同影响,因此由式(13)构造的相关观测抗差估计模型对观测空间的误差及设计空间的不完善性均具有一定的抗差性及改善作用。特别是对含粗差的杠杆观测值,具有良好的抗差效果(见算例)。

3) 根据权的定义及 LS 估计原理,当先验单位权中误差  $\sigma_0$  的取值不同时,虽然不会影响到残差、观测值平差值及参数估值,但对单位权中误差  $\hat{\sigma}_0$  有影响。而  $D_j$  中的  $\sqrt{p_{jj}}$  可消除这种影响。这也是与引言中提到的前几种等价权函数不同点之一。以 IGG III 方案为例,若取  $\sigma_0 = 1$ ,可排除观测值中粗差对参数估值的影响;当  $\sigma_0$  为其它值时,则不一定能达到抗差效果。而以  $D_j$  定义式(13)的等价权函数,则不会出现这种现象。因此  $D_j$  中的  $\sqrt{p_{jj}}$  是必不可少的。

抗差估计需迭代求解,迭代计算公式为:

$$\begin{cases} D_j^{(k)} = \sqrt{p_{jj}} |v_j^{(k-1)}| / \sqrt{r_{jj}} \hat{\sigma}_0^{(k-1)} \\ l^{(k-1)} = L - A \hat{x}^{(k-1)} \\ \delta \hat{x}^{(k)} = (A^T P^{(k)} A)^{-1} A^T P^{(k)} l^{(k-1)} \\ V^{(k)} = A \delta \hat{x}^{(k)} - l^{(k-1)} \\ \hat{\sigma}_0^{(k)} = \pm \sqrt{V^{(k)T} P^{(k)} V^{(k)}} / (n - m - 1) \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $k > 1$ 。当  $k = 1$  时,进行 LS 估计,应采用 LS 估计公式。 $\hat{\sigma}_0^{(k)}$  中的  $l$  为被淘汰掉的观测值个数。对于相关观测值而言,当某一观测值  $j$  中含有粗差时,由等价权函数的定义,此时应剔除先验权阵  $P$  中的第  $j$  列,因此  $l$  可看作是  $p_{jj} = 0$  的个数。每一次迭代相当于进行一次 LS 估计,但应以等价权  $p$  代替先验权  $P$ 。当前后两次迭代计算的参数估值之差满足迭代收敛精度时,停止计算,此时即获得了参数估值的抗差解。

## 3 算例

图 1 为一实测 GPS 网。图中,  $\Delta$  为三角点,  $\circ$  为 GPS 点;白体数字为向量号;黑体数字为点号。该网的平均多余观测分量  $r = (n - m) / n = 0.533$ ,最大的多余观测分量为 0.852,最小为 0.251。总的来说,该网对观测值中的粗差具有较好的监控能力。以 1 号点为固定点,以基线向量为观测值,取先验单位权中误差  $\sigma_0 = 5$  mm 进行空间无约束平差,平差后所得单位权中误差  $\hat{\sigma}_0 = \pm 5.8$  mm,通过  $\chi^2$  检验。通过对外业观测值及平差成果的分析,认为该网质量合格,观测值中无粗差,作为  $D_0$ 。

方案。

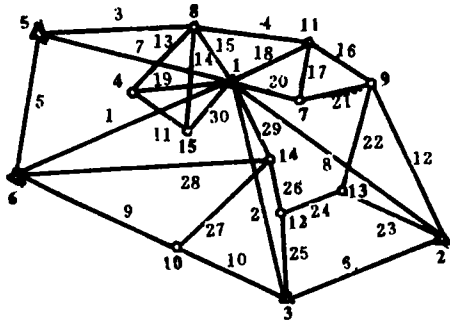


图 1 GPS 网略图

Fig. 1 GPS Network

3.1 方案设计

为衡量本文所构造的抗差估计模型的抗差效果,采取在观测值中加入粗差的方法,制定不同方案。所加粗差的个数从 1 个增至 7 个。粗差的大小,在  $D_0$  方案为单位权中误差  $\hat{\sigma}_0$  的 2 倍至 4 倍之间,以衡量该模型对小粗差的探测能力。所加粗差位置,按以下原则选取:

- 1) 所加粗差观测值既有多余观测分量  $r_{ij}$  较大的(大于  $r$ ),也有较小的(小于  $r$ ),也有接近于  $r$  的。特别注意在  $r_{ij} < r$  的观测值上多加粗差。
- 2) 粗差既可加在同一基线向量上(多粗差时),也可加在不同向量上,且尽量避免在同一位置上多次加粗差(不同粗差个数时)。

这样,就可根据抗差估计平差成果,对该模型的抗差效果作出切合实际的全面评价。按上述原则共制定了 30 个方案,基本上图 1 中的每一基线向量中都加过粗差。对这些方案分别进行抗差估计,其成果与  $D_0$  方案相比较。对于  $D_0$  方案,LS 估计和抗差估计的结果是一致的。为说明问题及节省篇幅,本文列出其中的 3 个方案,见表 1。

表 1 方案及粗差识别

Tab. 1 Design and Identifying Outliers

方案号	粗差位置	粗差 mm	$r_{ij}$	零等价权位置	残差 mm
$D_1$	14	20	0.331	11	-19.5
	16	20	0.251	16	-20.3
	68	-20	0.312	68	18.1
$D_2$	49	-15	0.108	49	16.5
	50	15	0.447	50	-12.9
	51	-15	0.118	51	11.5
	72	15	0.157	72	-13.1
	25	-15	0.526	25	11.8
$D_3$	31	15	0.521	31	-15.8
	32	-20	0.528	32	19.4
	33	-15	0.522	33	16.0
	62	20	0.530	62	-18.5

3.2 抗差估计对粗差的识别

根据抗差估计原理,当观测值中含有粗差时,抗差估计应对粗差的位置和大小作出正确的识别。从等价权上来说,即当某些观测值中是否含有粗差时,其等价权应为零。因此可根据抗差估计结束后零等价权的位置(对于相关观测值,即  $\hat{p}_{ij} = 0$  的位置)来判定该观测值中是否含有粗差。表 1 中列出了 3 个方案、零等价权的位置及相应残差。

从表 1 (及其它未列出的方案)可以看出,本文所构造的抗差估计模型,一方面,不论是多余观测分量较小(杠杆观测值),还是较大或接近于平均多余观测分量的观测值中含有粗差,均能作出正确的定位;另一方面,抗差估计后含粗差观测值的残差与所加粗差的绝对值基本一致,最大相关 3.2 mm。因此该模型能对粗差进行正确识别。

对这些方案,还采用式(12)构造统计量,进行粗差探测,但探测结果均不正确。因此,以标准化残差构造的抗差估计模型对粗差的识别能力比标准化残差对粗差的探测能力要强得多。

3.3 平差成果比较

对于抗差估计,当观测值中含有粗差时,其平差成果与观测值中不含粗差时的 LS 估计成果之间应无明显差异。表 2 中列出了各方案抗差估计平差成果与  $D_0$  方案 LS 估计成果之间差异的统计结果及抗差估计的单位权中误差  $\hat{\sigma}_0$ 。表中  $\Delta X$ 、 $M_p$ 、 $M_i$  分别表示坐标平差值;点位中误差及平差后基线向量中误差之间差异的绝对值。

表 2 中的单位权中误差均通过了  $\chi^2$  检验。从表 2 (及其它未列出方案)中可以看出,当观测值中含有 1 个或多个粗差时,不论是从定位参数上,还是从有关精度信息上来讲,抗差估计成果与观测值中不含粗差时的 LS 估计成果之间均没有明显的差异。

表 2 平差成果差异统计/mm

Tab. 2 The Statistical Differences of Adjustment Results

项目	$D_1$	$D_2$	$D_3$	
$\Delta X$	最大	1.0	2.1	1.1
	最小	0	0.1	0
	平均	0.3	0.3	0.3
$M_p$	最大	1.0	0.3	0.5
	最小	0.4	0	0.1
	平均	0.6	0.1	0.3
$M_i$	最大	0.4	0.4	0.3
	最小	0	0	0
	平均	0.2	0.1	0.1
$\hat{\sigma}_0$	5.2	5.2	4.7	

当取先验单位权中误差  $\sigma_0$  分别为 1 mm、10 mm、20 mm 和 100 mm 时,除表 2 中的单位权中误差  $\sigma_0$  变化相应倍数(但均通过相应的  $\chi^2$  检验)外,其它结果与表 1、2 中的完全一致。对于引言中的前 4 种模型,却不能取到这种抗差效果。因而,该模型可克服由于  $\sigma_0$  的取值不当而影响抗差效果的缺陷。

本文以标准化残差构造的相关观测抗差估计模型,对观测空间和设计空间均具有良好的抗差效果。抗差估计所获得的平差成果是可靠的。由于标准化残差对观测值中的粗差本身已具有一定的探测能力,因而该模型具有一定的理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 杨元喜. 抗差估计原理及其应用. 北京: 八一出版社, 1993
- 2 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 北京: 测绘出版社, 1988
- 3 余学祥, 吕伟才. 独立观测量抗差估计效果分析. 东北测绘, 1998(1): 11~13
- 4 陶本藻, 邱卫宁. GPS 网的可靠性和效率. 勘察科学技术, 1995(6): 40~43
- 5 张方仁. 最小二乘估计残差的统计性质和应用. 见: 平差模型误差理论及其应用. 北京: 测绘出版社, 1993. 135~144

## Robust Estimation Model for Correlated Observations Based on Standardized Residuals

Yu Xuexiang     Liu Weicai

(Dept. of Resource and Environment Engineering, Huainan University of Technology,  
Huainan City, Anhui Province, China, 232001)

**Abstract** This paper builds robust estimation model for correlated observations structured by standardized residuals from the relationship between the observation errors and the function of difference solutions. By calculating and analyzing GPS network with simulative gross error, this model not only has good robustinity to both observation space and design space, but also can eliminate the influence that the unsuitable prior standard error of unit weight takes on the robust estimation effect.

**Key words** correlated observations; robust estimation; standardized residuals; observation space; design space

### 《武汉测绘科技大学学报》1999~2000 年指导性选题目录

经征求意见,本刊编辑部拟定了《武测学报》1999~2000 年指导性重点选题计划。凡属该计划内容的稿件,本刊编辑部将采取倾斜政策,在审稿、发表、时间、专业比例、字数限制、审稿、论文评比、奖励等方面给以优惠,借以形成刊物更显著的特色。选题目录如下:

- ① 卫星定位技术及应用;
- ② 地球重力场研究与地球动力学理论;
- ③ 数字摄影测量与遥感技术中的新理论、新方法;
- ④ 图形图像处理中的新技术、新理论;
- ⑤ 地理信息系统理论;
- ⑥ 计算机地图制图综合中的理论与方法;
- ⑦ 3S 集成中的理论问题、关键技术和应用;
- ⑧ 计算机网络技术与多媒体技术。