DOI:10.13203/j.whugis1999.01.017
第 24 卷第 1 期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 24 No. 1
1999 年 3 月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping March 1999

最小二乘解的一种直接算法

於宗俦

（武汉测绘科技大学地学测量工程学院，武汉市珞喻路 129 号，430079）

摘 要 提出一种最小二乘解的直接算法，它无需组成和解算法方程就可以求得同样的 $\hat{L}$ 和 $\hat{X}$。

关键词 最小二乘解；直接算法；法方程组

分类号 P207.2

在最小二乘平差中，对于同一个平差问题，不论是采用条件平差还是间接平差，其最后结果总是相等的，而且这两种平差法的计算公式都是在"$V^TPV=\min$"的准则下所导出的，它们都有组成法方程、解算法方程等一系列解算过程。本文提出的一种算法是，只要同时有了该平差问题的条件方程式和误差方程式，就可直接算出其最小二乘解。

1 传统的最小二乘平差计算公式

为了便于讨论，下面将先写出条件平差和间接平差的传统计算公式。

设在某平差问题中，观测值个数为 n，必要观测数为 t，多余观测数 $r=n-t$，已知观测向量的权阵和协因数阵分别为 P 和 Q，$PQ=I$，则有：

1）条件平差的计算公式

条件方程：$\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}=\underset{r,1}{W}$ (1)

法方程：$\underset{r,r}{N_{aa}}\underset{r,1}{K}=\underset{r,1}{W}$ (2)

改正数方程：$\underset{n,1}{V}=QA^TN_{aa}^{-1}W$，$\underset{r,r}{N_{aa}}=AQA^T$ (3)

平差值：$\hat{L}=L+V$ (4)

2）间接平差的计算公式

误差方程：$\underset{n,1}{V}=\underset{n,t}{B}\underset{t,1}{\hat{x}}-\underset{n,1}{l}$ (5)

法方程：$\underset{t,t}{N_{bb}}\underset{t,1}{\hat{x}}=B^TPL$ (6)

参数改正数的解：$\underset{t,1}{\hat{x}}=N_{bb}^{-1}B^TPL$，$\underset{t,t}{N_{bb}}=B^TPB$ (7)

参数平差值：$\hat{X}=X^0+\hat{x}$ (8)

2 最小二乘解的直接算法

考虑到 $Q^{1/2}P^{1/2}=I$，则可将式(1)改写成如下形式：

$$AQ^{1/2}P^{1/2}V=W \tag{9}$$

又用 B^TP 左乘式(5)两边得：

$$B^TP^{1/2}P^{1/2}V=B^TPB\hat{x}-B^TPL=N_{bb}\hat{x}-B^TPL \tag{10}$$

若令 $AQ^{1/2}=\underset{r,n}{A'}$ $\quad B^TP^{1/2}=\underset{t,n}{B'^T}$ $\quad P^{1/2}V=\underset{n,1}{V'}$ (11)

同时考虑到 $N_{bb}\hat{x}-B^TPL=0$，参见式(6)，则式(9)、(10)可以写成：

$$\underset{r,n}{A'}\underset{n,1}{V'}=\underset{r,1}{W},\quad \underset{t,n}{B'^T}\underset{n,1}{V'}=\underset{t,1}{O} \tag{12}$$

令

$$\underset{n,n}{A}=\begin{bmatrix}\underset{r,n}{A'}\\ \underset{t,n}{B'^T}\end{bmatrix},\quad \underset{n,1}{W}=\begin{bmatrix}\underset{r,1}{W}\\ \underset{t,1}{O}\end{bmatrix} \tag{13}$$

则式(12)可写成：

$$\underset{n,n}{A}\underset{n,1}{V'}=\underset{n,1}{W} \tag{14}$$

由于 $r+t=n$，故矩阵 A 为一方阵。此外，又因 $\underset{r,n}{A}$ 行满秩，$\underset{n,t}{B}$ 列满秩，$\underset{t,n}{B'^T}$ 为行满秩，而且对于同一个平差问题，其系数阵 A 与 B 之间恒有：

$$AB=0$$

因而

$$A'B'=AQ^{1/2}\cdot P^{1/2}B=AB=0 \tag{15}$$

上式表明，A' 的行向量与 B' 的列向量两两正交，因此，A 是 n 阶的满秩方阵，存在 A^{-1}。直接由式(14)得：

$$V'=A^{-1}W \tag{16}$$

若将上式左乘 $Q^{1/2}$（参见(11)式）便得到改正数向量 V，即

$$V=Q^{1/2}V'=Q^{1/2}A^{-1}W \tag{17}$$

可以证明，这样求得的 V 就是在"$V^TPV=\min$"准则下所求得的改正数向量。下面进行证明。考虑到 $V'=P^{1/2}V$，故准则"$V^TPV=\min$"就等价于"$V'^TV'=\min$"。为此，先组成拉格朗日函数：

收稿日期：1998-09-25。於宗俦，男，75 岁，教授，博士生导师，现从事近代测量平差理论和方法研究。

$$\Phi = V'^{\mathrm{T}}V' - 2K^{\mathrm{T}}(\bar{A}V' - \bar{W})$$

要使 Φ 最小，须将 Φ 对 V' 求一阶偏导并令其等于零，得：

$$\partial\Phi/\partial V' = 2V'^{\mathrm{T}} - 2K^{\mathrm{T}}\bar{A} = 0$$

由此得：

$$V' = \bar{A}^{\mathrm{T}}K \qquad (18)$$

将上式代入式(14)，得：

$$\bar{A}\bar{A}^{\mathrm{T}}K = \bar{W},$$

于是，
$$K = (\bar{A}\bar{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{W} \qquad (19)$$

由于 $\bar{A}$ 为可逆阵，因此，$(\bar{A}\bar{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\bar{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}^{-1}$，即 $K = ((\bar{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}^{-1})\bar{W}$，将此代入式(18)，则有：

$$V' = \bar{A}^{\mathrm{T}}((\bar{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}^{-1})\bar{W} = \bar{A}^{-1}\bar{W} \qquad (20)$$

上式即为式(16)。可见，由式(17)求得的 V 就是在“$V^{\mathrm{T}}PV = \min$”准则下所求得的改正数向量，进而即可求得观测量的平差值为 $\hat{L} = L + V$。

在实际工作中，除了要计算观测量的平差值之外，通常还要算出参数的平差值 $\hat{X}(= X^0 + \hat{x})$。由式(5)知：

$$\underset{n,t,1}{B\hat{x}} = \underset{n,1}{V} + \underset{n,1}{L} \qquad (21)$$

为了求得 t 个参数的改正数，可以从以上 n 个方程中任意选取 t 个方程。假设这 t 个方程的系数阵以 B_t 表示，常数项以 $(V+L)_t$ 表示，则有：

$$B_t\hat{x} = (V + L)_t \qquad (22)$$

此时 B_t 是 t 阶方阵。若 B_t 可逆，则可解得：

$$\underset{t,1}{\hat{x}} = B_t^{-1}(V + L)_t \qquad (23)$$

至于如何从 n 个方程中选出 t 个方程，能保证 B_t 有逆，将在下面结合算例作具体说明。

当观测值为等精度时，$P = Q = I$，则有 $A' = A$，$B'^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$，$V' = V$。在此情况下，只需由系数阵 A 和 B 直接组成 $\bar{A}$，即

$$\bar{A} = [A \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \qquad (24)$$

并由下式求得：

$$V = \bar{A}^{-1}\bar{W} \qquad (25)$$

综上所述，只要有某个平差问题的条件方程式和误差方程式，而不需要组成法方程、解算法方程等计算过程，就可直接解出满足“$V^{\mathrm{T}}PV = \min$”的改正数向量 V 和平差值 $\hat{L}$，还可以求出参数的改正数 $\hat{x}$ 和平差值 $\hat{X}$。

3 算　例

在图 1 所示的水准网中，A、B 为已知点，其高程分别为 $H_A = 5.016$ m，$H_B = 6.016$ m。观测高差及各水准路线距离为(本例数据取自文献[1]的例 4-11)：

$$L = [1.359 \quad 2.009 \quad 0.363 \quad 1.012 \quad 0.657 \quad 0.238 \quad -0.595]^{\mathrm{T}}$$

$$S = [1.1 \quad 1.7 \quad 2.3 \quad 2.7 \quad 2.4 \quad 1.4 \quad 2.6]^{\mathrm{T}}$$

试求各高差的平差值及待定点高程的平差值。

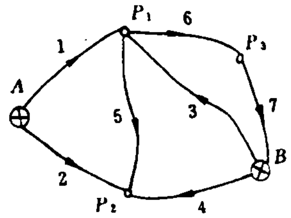

图 1　水准网

Fig. 1　Leveling Network

此处 $n = 7$，$t = 3$，$r = 7 - 3 = 4$。4 个条件方程为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} V = \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

设以待定点 P_1、P_2、P_3 的高程作为未知数 X_1、X_2 和 X_3，并取未知数近似值为：$X_1^0 = H_A + L_1 = 6.375$ m，$X_2^0 = H_A + L_2 = 7.025$ m，$X_3^0 = H_B - L_7 = 6.611$ m，则 7 个误差方程为：

$$V_{7,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以上误差方程的常数项单位为 mm，假设取 $p_i = 1/s_i$，则有权阵和协因数阵分别为：

$$P = \mathrm{diag}(0.909 \quad 0.588 \quad 0.435 \quad 0.370 \quad 0.417 \quad 0.714 \quad 0.385)$$

$$Q = \mathrm{diag}(1.1 \quad 1.7 \quad 2.3 \quad 2.7 \quad 2.4 \quad 1.4 \quad 2.6)$$

并有：

$$P^{1/2} = \mathrm{diag}(0.953 \quad 0.767 \quad 0.660 \quad 0.608 \quad 0.646 \quad 0.845 \quad 0.620)$$

和
$$Q^{1/2} = \mathrm{diag}(1.049 \quad 1.304 \quad 1.517 \quad 1.643 \quad 1.549 \quad 1.183 \quad 1.612)$$

根据式(11)得：

$$A' = AQ^{1/2} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.049 & 0 & 0 & 0 \\ -1.304 & 0 & 0 & 1.304 \\ 0 & 1.517 & 1.517 & 0 \\ 0 & -1.643 & 0 & -1.643 \\ 1.549 & 1.549 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.183 & 0 \\ 0 & 0 & 1.612 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{1/2} = \begin{bmatrix} 0.935 & 0 & 0 \\ 0 & 0.767 & 0 \\ 0.660 & 0 & 0 \\ 0 & 0.608 & 0 \\ -0.646 & 0.646 & 0 \\ -0.845 & 0 & 0.845 \\ 0 & 0 & -0.620 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}$ 组成式(14)的系数阵 $\boldsymbol{A}$，其常数项 $\boldsymbol{W}$ 为：

$$\boldsymbol{W} = [-7 \quad -8 \quad -6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

然后按式(17)即可算得改正数向量 $\boldsymbol{V}$：

$$\boldsymbol{V} = [-0.24 \quad 2.86 \quad -1.24 \quad -0.14 \quad -3.90 \quad -0.61 \quad -1.14]^{\mathrm{T}}$$

故观测量的平差值为：

$$\hat{\boldsymbol{L}} = [1.358\,8 \quad 2.011\,9 \quad 0.358\,8 \quad 1.011\,9 \quad 0.653\,1 \quad 0.237\,4 \quad -0.596\,2]^{\mathrm{T}}$$

以上结果与文献[1]中例 1-11 的计算结果完全一致。

在本例中，从误差方程式可以看出，其中在第 1、2、7 三个方程中，每个方程各包含 1 个不同的未知数，且常数项均为零。因此，无需解算即可直接写出：

$$\hat{x}_1 = v_1 = -0.24\ \mathrm{mm}, \quad \hat{x}_2 = v_2 = 2.86\ \mathrm{mm}$$
$$\hat{x}_3 = -v_7 = 1.14\ \mathrm{mm}$$

故得待定点高程的平差值为：

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}^0 + \hat{\boldsymbol{x}} = [6.374\,8 \quad 7.027\,9 \quad 6.612\,1]^{\mathrm{T}}$$

如果误差方程的形式不是如此简单，则可从中任意挑选 3 个误差方程式，只要这 3 个误差方程所对应的观测值不构成一个水准环或已知点间的附合条件，则其系数阵 $\boldsymbol{B}_t$ 一定是可逆的。例如，对本例而言(见图 1)，可以选第 1、2、6，或第 1、2、7，或第 2、5、6 等 3 个方程，但不能选用第 1、2、5，或第 1、6、7，或第 1、2、4 等 3 个方程，因为 1、2、5 是在同一水准环内，1、6、7 是在已知点 A 和 B 间形成一个附合条件，而 1、2、4 则因其中 2、4 同样是在已知点 A 和 B 间形成一个附合条件，这时系数阵 $\boldsymbol{B}_t$ 无逆，因而无法求解。在本例中，若选用第 1、2、6 个方程，则有：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.24 \\ 2.86 \\ 1.39 \end{bmatrix}$$

其中常数项为：$-0.24 = v_1 + l_1$；$2.86 = v_2 + l_2$；$1.39 = v_6 + l_6$。解之得 $\hat{x} = [-0.24 \quad 2.86 \quad 1.15]^{\mathrm{T}}$。这与前面直接确定的一致，只有 $\hat{x}_3$ 末位数差 1。

参 考 文 献

1 於宗俦，鲁林成. 测量平差基础(增订本). 北京：测绘出版社，1983

2 於宗俦，于正林. 测量平差原理. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1990

A Direct Algorithm of Least Squares Solutions

Yu Zongchou

(School of Geo science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract In the least squases adjustment, in order to get the solutions satisfying "$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} = \min$". It must first construct and solve the normal equation system no matter what adjustment method is used, and then calculate the vectors $\boldsymbol{V}$, $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}$ and $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}^0 + \hat{\boldsymbol{x}}$, using the direct algorithm proposed in this paper, we can find the same adjusted results $\hat{\boldsymbol{L}}$ and $\hat{\boldsymbol{X}}$, in which it does not need to construct and solve the normal equation system.

Key words least squares solution; direct algorithm; normal equation system